On note E l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ à valeurs complexes telles que, pour tout nombre réel $s > 0$, la fonction

$$u \mapsto \frac{f(u)}{u+s}$$

soit intégrable sur I. On note $\hat{f}$ la fonction définie sur I par la formule

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s} du .$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction $\hat{f}$.

Partie I - Étude de E

I.A - Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et stable par l'application $f \mapsto |f|$.

I.B - On note L l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur I. Comparer au sens de l'inclusion les espaces vectoriels L et E.

I.C - Pour tout nombre réel α, on note f_α la fonction définie sur I par la formule $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α appartient à E, et prouver alors que $\hat{f}_\alpha$ est proportionnelle à f_α. On exprimera le coefficient de proportionnalité à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie II - Propriétés de $\hat{f}$

Soit f une fonction appartenant à E.

II.A - Montrer que la fonction $\hat{f}$ est continue sur I.

II.B - Comportement asymptotique de $\hat{f}$ en $+\infty$

II.B.1) Déterminer la limite de $\hat{f}$ en $+\infty$.

II.B.2) On suppose de plus f intégrable sur I. Déterminer la limite, lorsque s tend vers $+\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\frac{u}{s}+1} du .$$

À quelle condition ce résultat permet-il d'obtenir un équivalent de $\hat{f}$ au voisinage de $+\infty$? Donner dans ce cas cet équivalent.

II.B.3) Donner des conditions suffisantes portant sur f permettant d'obtenir un développement limité à tout ordre de la fonction $\hat{f}$ en $+\infty$. Donner un tel développement ainsi qu'un exemple de fonction vérifiant les conditions trouvées : on pourra observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u+s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{u^k}{s^{k+1}} + (-1)^n \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{u+s}.$$

II.C - Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel h tel que $|h| < a$ établir que

$$\hat{f}(a+h) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}} du\right) h^p.$$

Que vient-on de démontrer pour $\hat{f}$? Que peut-on en déduire ?

Partie III - Expression de $\hat{f}$ comme transformée de Laplace

On note F le sous-espace vectoriel des fonctions complexes continues sur I telles que, pour tout nombre réel $x > 0$, la fonction

$$u \longmapsto e^{-xu} f(u)$$

soit intégrable sur I. La fonction Lf définie alors par la formule

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u) du$$

s'appelle la transformée de Laplace de f.

III.A - Transformée de Laplace d'un élément de E

III.A.1) Soit x un nombre réel >0. Justifier l'existence du nombre réel

$$M(x) = \sup_{u > 0} \left(e^{-xu}(1+u)\right).$$

Comparer $M(x_1)$ et $M(x_2)$ lorsque $0 < x_1 < x_2$.

III.A.2) Montrer que E est contenu dans F.

III.A.3) Soit f une fonction appartenant à E.

a) Montrer que la fonction Lf est continue sur I. Quel est son comportement en $+\infty$?

b) Donner une condition suffisante portant sur f pour que Lf possède une limite en 0^+. Donner un exemple de fonction réelle appartenant à E telle que

$$\lim_{x \to 0,\, x > 0} Lf(x) = +\infty.$$

III.B - Transformée de Laplace d'une fonction de type Lf où f appartient à E

Soit f un élément de E.

III.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur I par la formule

$$g_n(x) = \int_{1/n}^{n} e^{-xu} f(u)\, du .$$

Montrer que g_n est continue sur I. Quel lien existe-t-il entre la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ et la fonction Lf ?

III.B.2) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et n un entier naturel non nul. Pour tout $s \in I$, montrer que

$$\int_a^b e^{-sx} g_n(x)\, dx = e^{-sa} \int_{-1/n}^{n} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s}\, du - e^{-sb} \int_{1/n}^{n} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s}\, du .$$

En déduire que

$$\int_a^b e^{-sx} Lf(x)\, dx = e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s}\, du - e^{-sb} \int_0^{+\infty} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s}\, du .$$

III.B.3) Montrer que

$$\int_a^b e^{-sx} Lf(x)\, dx$$

admet une limite lorsque a tend vers 0 et que b tend vers $+\infty$.

III.B.4) Montrer que Lf est élément de F et que sa transformée de Laplace est $\hat{f}$, c'est-à-dire que pour tout $s \in I$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} Lf(x)\, dx = \hat{f}(s)$$

III.B.5) Application. Soit α un élément de $]0, 1[$. En considérant la fonction f_α définie au I.C, établir que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\, du$$

où Γ est la fonction définie sur I par la formule

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha-1}\, dy .$$

<u>*Partie IV - Calcul de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\, du$</u>

On se propose d'établir la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u e^{i\lambda}+1}\, du = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{-i\lambda\alpha} \qquad (1)$$

où $\alpha \in\ ]0, 1[$ et $\lambda \in\ ]-\pi, \pi[$.

IV.A - Étudier l'intégrabilité de

$$u \longmapsto \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda}+1}$$

sur I lorsque α appartient à $]0,1[$ et λ appartient à $]-\pi,\pi[$.

IV.B - On pose

$$\gamma(\alpha,\lambda) = e^{i\lambda\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda}+1}du\ ,\ 0<\alpha<1\ ,\ -\pi<\lambda<\pi$$

Montrer que, pour tout $0<\alpha<1$, la fonction $\lambda \longmapsto \gamma(\alpha,\lambda)$ est constante sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ (on pourra observer que si λ_0 est un élément de $]0,\pi[$, pour tout $u>0$ et tout $|\lambda|\le\lambda_0$, $|ue^{i\lambda}+1|^2 \ge \left|ue^{i\lambda_0}+1\right|^2$).

IV.C - En utilisant la relation $\gamma(\alpha,-\lambda) = \gamma(\alpha,\lambda)$ et la formule d'Euler

$$\sin\lambda\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\lambda\alpha}-e^{-i\lambda\alpha})$$

montrer que, pour tout $0<\lambda<\pi$,

$$\gamma(\alpha,\lambda)\sin\lambda\alpha = \sin\lambda\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha}}{1+2u\cos\lambda+u^2}du\ .$$

À l'aide d'un changement de variable prouver que

$$\gamma(\alpha,\lambda)\sin\lambda\alpha = \int_{\mathrm{cotan}\lambda}^{+\infty}\frac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^{\alpha}}{u^2+1}du\ .$$

IV.C.1) En introduisant une suite d'éléments de $]0,\pi[$ convergeant vers π, obtenir la formule (1). Calculer finalement l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{1+u}du$$

et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\ .$$

••• FIN •••