Notations

Si A est une matrice de $M_n(K)$, $\mathrm{Tr}A$ désigne la trace de A. On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : si A est une matrice de $M_{n,p}(K)$ et B une matrice de $M_{p,n}(K)$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Le problème porte sur des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ou complexes. L'ensemble de ces matrices sera noté $M_2(K)$, où K désignera selon le cas, le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. On notera E la matrice unité :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et on désignera par $\mathcal{B}$ la base canonique de $M_2(K)$, constituée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices scalaires, c'est-à-dire celles de la forme aE, avec a appartenant à K.

On notera $s(A)$ “la matrice complémentaire” de la matrice A, qui est par définition la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ seront identifiés aux espaces de matrices colonnes $M_{n,1}(\mathbb{R})$; ces espaces seront munis de leur structure euclidienne canonique pour laquelle le produit scalaire des vecteurs X et Y est donné par ${}^tXY$; la norme associée sera notée $\|X\|$.

Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$, on notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques, $\mathcal{S}$ celui des matrices symétriques, et $\mathcal{O}$ celui des matrices orthogonales. On désignera enfin par $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathcal{S}$ qui vérifient ${}^tXAX \geq 0$ quel que soit X dans $\mathbb{R}^2$.

Partie I -

Dans cette partie, on suppose que le corps de base K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $\mathcal{M}$ l'ensemble $M_2(K)$.

I.A -

I.A.1) Montrer que s est un endomorphisme de $\mathcal{M}$; donner la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}$. Montrer que les matrices suivantes constituent une base de $\mathcal{M}$:

$$E = B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner la matrice de s dans cette base. Déterminer $s \circ s$.

I.A.2) Montrer que $s(MN) = s(N)s(M)$. Comparer, lorsque cela est possible, $s(M^{-1})$ et $(s(M))^{-1}$.

I.A.3) Pour A appartenant à $\mathcal{M}$ établir la relation $s(A) = -A + \mathrm{Tr}(A)E$. Montrer que si A est semblable à B, alors $s(A)$ est semblable à $s(B)$.

I.B - On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}$ dont la trace est nulle. Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ et préciser sa dimension. Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}$.

Partie II -

Dans cette partie, le corps de base est $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}$ désigne $M_2(\mathbb{R})$.

II.A -

II.A.1) Pour M et N dans $\mathcal{M}$ on pose $\langle M|N\rangle = \mathrm{Tr}(M^tN)$. Montrer que cela définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}$ et donner l'expression de la norme associée.

II.A.2) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$, considérés dans la première partie, sont orthogonaux pour ce produit scalaire. Montrer qu'il en est de même pour les sous-espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$.

II.A.3) Montrer que pour tout A dans $\mathcal{M}$ et pour tout X et Y dans $\mathbb{R}^2$, on a $\langle A|X^tY\rangle = {}^tXAY$.

II.B - Soient X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ formant une base orthonormée de cet espace, et α un réel. On définit les matrices P et $Q(\alpha)$ de $\mathcal{M}$ par : $P = E - 2X^tX$ et $Q(\alpha) = E - 2\sin^2\alpha(X^tX + Y^tY) + \sin(2\alpha)(X^tY - Y^tX)$.

II.B.1) Montrer que ${}^tQ(\alpha) = Q(-\alpha)$.

II.B.2) Montrer que P et $Q(\alpha)$ sont des matrices orthogonales.

II.C - Soit A une matrice de $\mathcal{M}$ telle que, quelle que soit la matrice Ω de $\mathcal{O}$, on ait : $\langle A|\Omega - E\rangle \le 0$. Montrer que $A \in \mathcal{S}^+$. Suggestion : calculer $\langle A|P - E\rangle$ et $\langle A|Q(\alpha) - E\rangle$ en utilisant la question II.A.3.

II.D - Dans toute la question, Ω est un élément de $\mathcal{O}$.

II.D.1) Montrer que $\Omega + {}^t\Omega - 2E = -(\Omega - E)^t(\Omega - E)$.

II.D.2) Soit A appartenant à $\mathcal{S}^+$, et C appartenant à $\mathcal{M}$. Montrer que les valeurs propres de A sont positives ou nulles et montrer que ${}^tCAC$ appartient à $\mathcal{S}^+$.

II.D.3) Soit $M \in \mathcal{M}$; montrer qu'il existe un unique couple (U,V) avec U dans $\mathcal{S}$ et V dans $\mathcal{A}$ tel que $M = U + V$; déterminer U et V en fonction de M.

II.D.4) Pour A dans $\mathcal{S}^+$ montrer que $2\langle A|\Omega - E\rangle = -\mathrm{Tr}({}^t(\Omega - E)A(\Omega - E))$ et en déduire que, quelle que soit Ω orthogonale, $\langle A|\Omega - E\rangle \le 0$.

II.E -

II.E.1) Soit A appartenant à $\mathcal{S}^+$. Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{S}^+$ telle que $A = B^2$. On pourra pour cela diagonaliser A.

II.E.2) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes pour A dans $\mathcal{S}^+$ et Ω orthogonale : $\Omega A = A$; $A\Omega = A$; $\langle A|\Omega - E\rangle = 0$.

II.E.3) Montrer que, quelles que soient les matrices A dans $\mathcal{S}^+$ et Ω dans $\mathcal{O}$, on a $\mathrm{Tr}(A\Omega) \le \mathrm{Tr}(A)$. Quand a-t-on égalité ?

Partie III -

Dans toute cette partie, les matrices considérées sont dans $M_2(\mathbb{C})$ que l'on considère comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on définit le sous-ensemble H de $M_2(\mathbb{C})$ dont les éléments sont de la forme

$$\begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix}$$

où u et v sont quelconques dans $\mathbb{C}$.

III.A -

III.A.1) Montrer que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; on considère les matrices

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Vérifier que (E,I,J,K) est une base de H.

III.A.2) Montrer que toute matrice non nulle de H est inversible, et que son inverse est dans H.

III.A.3) Pour A et B dans H on pose

$$\beta(A, B) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(As(B) + Bs(A)).$$

Montrer que

$$\beta(A, B) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(AB)) \text{ et que } \det(A) = \beta(A, A).$$

Indication : on pourra utiliser la question I.A.3.

III.A.4) Montrer que β définit un produit scalaire sur H ; si on note N la norme associée, donner l'expression de $N(A)$ et justifier que $N(A)^2E = As(A)$.

III.B - On considère le sous-ensemble P de H formé des matrices de trace nulle. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de H ; donner sa dimension. Montrer que tout élément A de H s'écrit de façon unique sous la forme $aE + p(A)$ avec a réel et $p(A)$ dans P. Quelle est alors la valeur de $s(A)$?

III.C - Pour un vecteur $X = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ on définit

$$\theta(X) = \begin{bmatrix} -iz & -x + iy \\ x + iy & iz \end{bmatrix}.$$

III.C.1) Montrer que θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sur P, et que tout élément de H s'écrit de façon unique sous la forme $aE + \theta(X)$, avec a dans $\mathbb{R}$ et X dans $\mathbb{R}^3$.

III.C.2) Montrer que $\theta(X)\theta(Y) = (-{}^tX\,Y)E + \theta(X \wedge Y)$. En déduire l'expression générale du produit $(aE + \theta(X))(bE + \theta(Y))$.

III.C.3) Soit A un élément de H, $A \neq 0$. Montrer que A est dans P si et seulement si $A^2 = \alpha E$ avec $\alpha < 0$. Montrer que $N(\theta(X)) = \|X\|$.

III.C.4) On appelle centre de $\mathcal{H}$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ commutant, pour le produit, avec tout élément de $\mathcal{H}$:

$$\mathrm{centre}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{H} \mid \forall H \in \mathcal{H},\ AH = HA\}.$$

Déterminer le centre de $\mathcal{H}$.

Partie IV -

On conserve dans cette partie les conventions et notations de la troisième partie ; en particulier $\mathcal{H}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour A dans $\mathcal{H}$, A non nul on considère l'application τ_A définie sur $\mathcal{H}$ par $\tau_A(M) = AMA^{-1}$.

IV.A -

IV.A.1) Montrer que τ_A est un automorphisme de $\mathcal{H}$ et que

$$\tau_A(M) = \frac{1}{N(A)^2} AMs(A).$$

IV.A.2) Montrer que si λ appartient à $\mathbb{R}^*$ on a $\tau_A = \tau_{\lambda A}$.

IV.A.3) Montrer que si $\tau_A = \tau_B$, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $A = \lambda B$.

IV.B -

IV.B.1) Montrer que le sous espace $\mathcal{P}$ est stable par τ_A.

IV.B.2) En déduire que τ_A permet de définir une application linéaire ρ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ caractérisée par : $\tau_A(\theta(X)) = \theta(\rho(X))$ et prouver que ρ est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$.

IV.B.3) Soit U un vecteur non nul fixé de $\mathbb{R}^3$ et $A = \theta(U)$. On considère $\sigma = -\tau_A$. Montrer que l'application linéaire qui est associée à σ par la question précédente est la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à U.

••• FIN •••
