Dans tout le problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact, c'est-à-dire s'annulant chacune à l'extérieur d'un segment de $\mathbb{R}$.

Pour $i, j \in \mathbb{Z}$, $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

Les questions II.B, II.C et II.D sont relativement indépendantes.

Partie I - Les B-splines uniformes

I.A -

I.A.1) Pour $f \in E$, on définit la transformée de Fourier de f

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

a) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si $\widehat{f} = 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = 0 .$$

En déduire, à l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, que $f = 0$.

I.A.2) Pour $f \in E$, on définit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) .$$

a) Montrer que $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant 1 pour période. Calculer ses coefficients de Fourier, sous forme exponentielle.

b) En déduire, dans le cas où la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(2n\pi)$$

est absolument convergente, la formule suivante dite de Poisson

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(2n\pi) e^{2in\pi x} .$$

I.B - On définit la suite de fonctions réelles $(N_m)_{m \geq 1}$ par $N_1 = \chi_{[0,1[}$ et

$$\forall m \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, N_m(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt$$

où $\chi_{[0,1[}$ désigne la fonction caractéristique de $[0,1[$. Elle vaut 1 sur $[0,1[$ et 0 sur $\mathbb{R} \backslash [0,1[$.

I.B.1)

a) Représenter N_2.

b) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, N_m est une fonction strictement positive sur $]0, m[$, de classe C^{m-1} par morceaux sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à tout intervalle $]k, k+1[\subset]0, m[$ d'extrémités entières est un polynôme de degré au plus $m-1$. Montrer que, pour tout $m \geq 2$, N_m est de classe C^{m-2}.

c) Établir la propriété de symétrie

$$\forall m \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right).$$

I.B.2)

a) Montrer que

$$\forall m \geq 2, \forall t \neq 0, \widehat{N_m}(t) = \left(\frac{1 - e^{-it}}{it}\right)^m .$$

Donner la valeur de $\widehat{N_m}(0)$.

b) Établir, à l'aide de la formule de Poisson, la relation suivante dite partition de l'unité

$$\forall m \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} N_m(x-k) = 1 .$$

En déduire que

$$\forall m \geq 2, \int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(x)\,dx = 1 .$$

c) En comparant les transformées de Fourier, établir que

$$\forall m \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^{m} C_m^k N_m(2x-k) .$$

I.B.3) On se propose d'étudier la convergence de la suite N_m sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que la fonction N_m est croissante sur $[0, m/2]$ pour tout $m \geq 1$.

b) On admet que si $f \in E$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{ixt}\,dx .$$

Pour tout $m \geq 2$, exprimer $N_m(m/2)$ au moyen de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt .$$

Calculer

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^1 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt .$$

En déduire la limite de $N_m(m/2)$ lorsque $m \to +\infty$.

c) Étudier la convergence uniforme de la suite N_m sur $\mathbb{R}^+$.

Partie II - Équation d'échelle

On munit E du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t) dt .$$

On note $\| \ \|$ la norme associée.

Soit $c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de réels, **tous nuls sauf un nombre fini**. On dit que $\phi \in E$, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1$$

est une **fonction d'échelle** pour c lorsqu'elle vérifie une **équation d'échelle**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(2x - k) \qquad (E_c)$$

À chaque équation d'échelle (E_c), est associé le polynôme trigonométrique

$$P_c(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} .$$

Pour une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un réel p, on note $\phi(. - p)$ la fonction translatée $x \mapsto \phi(x - p)$.

II.A - Dans cette question, ϕ est une fonction d'échelle solution de (E_c).

II.A.1)

a) Montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k = 2 .$$

b) Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\phi(. - p)$ est une fonction d'échelle.

II.A.2) Établir l'équivalence suivante

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k c_{k-2p} = 2\delta_{0p} \Leftrightarrow |P_c(\xi)|^2 + |P_c(\xi + \pi)|^2 = 1 .$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que l'équation d'échelle a la propriété (O).

II.A.3) Établir que si la famille $\{\phi(. - p) | p \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormale alors (E_c) a la propriété (O). Calculer P_c pour les équations d'échelles vérifiées par les fonctions N_m à la question I.B.2-c. Indiquer celles ayant la propriété (O).

On se propose d'étudier, dans les questions suivantes, différentes approches des fonctions d'échelles.

II.B -

II.B.1) Soit $\phi \in E$ vérifiant l'équation d'échelle (E_c). Montrer que la transformée de Fourier de ϕ vérifie

$$\widehat{\phi}(\xi) = P_c\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

En déduire que

$$\widehat{\phi}(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{j=1}^{n} P_c\left(\frac{\xi}{2^j}\right).$$

II.B.2) Un exemple : soit $m \geq 2$ et la famille c définie par $c_k = 2^{1-m} C_m^k$ pour $k = 0, 1, \ldots, m$ et 0 ailleurs. Établir que

$$\forall n \geq 1, \forall \xi \in \mathbb{R} \backslash 2^{n+1}\pi\mathbb{Z}, \quad \prod_{j=1}^{n} P_c\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{2^n\left(1 - e^{-\frac{i\xi}{2^n}}\right)}\right)^m.$$

En déduire que si ϕ vérifie l'équation d'échelle (E_c) alors $\phi = N_m$.

II.C - Soit (E_c) une équation d'échelle écrite, pour simplifier,

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \phi(2x - k) \text{ avec } m \geq 2,$$

et telle que le polynôme trigonométrique associé P_c vérifie $P_c(\pi) = 0$,

On désigne par $D = \left\{\frac{k}{2^j} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\right\}$ l'ensemble, dense dans $\mathbb{R}$, des nombres dyadiques.

II.C.1) Vérifier que la connaissance de $\phi(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ permet d'obtenir $\phi(x)$ pour $x \in D$.

II.C.2) On se propose de rechercher des fonctions ϕ vérifiant (E_c) et s'annulant à l'extérieur de $[0, m[$. On note

$$V = \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \vdots \\ \phi(m-1) \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que V est solution de l'équation linéaire $V = MV$ où $M = (M_{i,j})_{0 \le i, j \le m-1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est une matrice dont on précisera les coefficients.

b) En utilisant la valeur de $P_c(\pi)$, vérifier que la somme des termes de chacune des colonnes de M est constante.

c) En déduire que 1 est valeur propre de M.

d) Établir l'existence de fonctions $\phi \neq 0$, définies sur D, s'annulant sur $D \backslash [0, m[$ et solution de (E_c).

II.C.3) Soit (Ec) l'équation d'échelle de la question II.B.2.

a) Établir que $\forall k = 0, 1, \ldots, m-2,\ N_m^{(k)}(1) > 0$.

b) En déduire, en considérant les dérivations successives de (E_c) vérifiée par N_m que M a pour spectre :

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{ \frac{1}{2^k} \,\middle|\, k = 0, 1, \ldots, m-1 \right\}.$$

c) Donner la dimension de l'espace propre $E_M(1)$ relatif à 1 et retrouver ainsi que N_m est la seule solution continue de l'équation d'échelle (E_c), nulle à l'extérieur de $[0, m[$.

II.D - Dans cette partie, on admet que les propriétés vues dans les parties I et II pour l'ensemble E s'appliquent à l'espace vectoriel F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact continues par morceaux et continues à droite. Soit (E_c) une équation d'échelle ayant la propriété (O).

On définit une suite de fonctions $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ par la récurrence :

$$\phi_0(0) = \chi_{[0,1[} \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}), (\forall j \in \mathbb{N}), \quad \phi_{j+1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_j(2x-k).$$

II.D.1) Qu'obtient-on pour $c_0 = c_1 = 1$ et les autres c_k nuls ?

On suppose désormais qu'il existe une fonction continue ϕ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \|\phi - \phi_n\| = 0.$$

II.D.2) Montrer que ϕ vérifie l'équation d'échelle (E_c).

II.D.3) Montrer que ϕ_n est à support compact pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que ϕ est à support compact.

II.D.4) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \langle \phi_n, \phi_n(.-p) \rangle = \delta_{0,p}.$$

En déduire que la famille $\{\phi(.-p) | p \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormale.

••• FIN •••