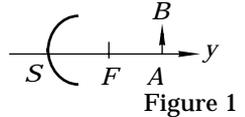


La radioastronomie est l'étude des ondes radio en provenance du ciel, émises par des étoiles éloignées mais aussi par le Soleil. Notations et valeurs numériques :

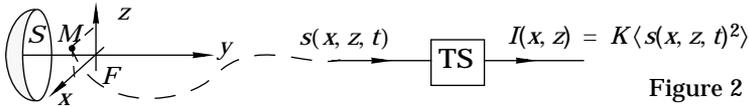
- Vecteur d'onde  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$ , avec  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $\lambda$  longueur d'onde (on prendra pour toute application numérique  $\lambda = 10$  cm).
- Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Fonction  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .
- Les grandeurs complexes seront exprimées avec  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .

Partie I - Étude d'un radiotélescope

Un radiotélescope comprend un miroir dont la surface est un paraboloïde de révolution. On assimilera dans toute la suite du problème ce miroir parabolique à un miroir sphérique concave de sommet  $S$  de foyer  $F$ , de rayon  $R$ , d'axe  $Sy$  (figure 1). On pose  $\overline{SF} = f$ .



Le radiotélescope comprend également une antenne située dans le plan focal image ( $Fx, Fz$ ) du miroir et susceptible d'être déplacée dans ce plan (figure 2).



La surface efficace de l'antenne est supposée ponctuelle de sorte que le radiotélescope est un **enregistreur point par point**. De plus, on suppose que cette antenne est entièrement tournée vers le miroir de sorte qu'elle est insensible aux ondes directes. On dispose ainsi d'un signal  $s(x, z, t)$  proportionnel au champ électrique au point  $M(x, z)$  du plan  $Fxz$ . Ce signal est supposé harmonique de fréquence  $\nu$ , et on peut lui associer une amplitude complexe instantanée  $\underline{a}(x, z, t) = A(x, z) \exp[i(2\pi\nu t - \varphi(x, z))]$ , où  $A(x, z)$  est un réel, telle que  $s(x, z, t) = \text{Re}[\underline{a}(x, z, t)]$  où  $\text{Re}[\underline{Z}]$  est la partie réelle de  $\underline{Z}$ . Dans la suite,  $\underline{a}(x, z, t)$  sera simplement appelée "amplitude complexe" et son amplitude réelle  $A(x, z)$  sera simplement appelée "amplitude". Le dispositif de traitement du signal,  $TS$ , transforme le signal d'entrée  $s(x, z, t)$  en signal d'intensité  $I(x, z) = K \langle s(x, z, t)^2 \rangle$  où  $\langle \rangle$  représente la valeur moyenne temporelle :

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \text{ et } K \text{ est une constante réelle.}$$

En notation complexe,  $I(x, z) = (K/2) \langle \underline{a}(x, z, t) \cdot \underline{a}^*(x, z, t) \rangle$  où  $\underline{a}^*$  désigne le complexe conjugué de  $\underline{a}$  (cas d'un signal rigoureusement harmonique).

**I.A** - Les ondes en provenance d'un astre à l'infini et prises en considération sont des ondes radio mais, dans la suite du problème, elles peuvent être traitées comme des ondes lumineuses dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique et de l'approximation de Gauss.

I.A.1) Indiquer en quoi consistent ces approximations et quelles en sont les principales conséquences.

I.A.2-a) Indiquer, sur un schéma, la position du centre de courbure  $C$  du miroir. Donner les propriétés optiques du centre  $C$ , du sommet  $S$  et du foyer  $F$ . Le miroir reçoit dans les conditions de Gauss la lumière émise par un petit objet frontal  $AB$  placé à droite du centre  $C$  (figure 1). On appellera  $A'$  l'image de  $A$  donnée par le miroir et  $B'$  l'image de  $B$ . À l'aide d'un tracé de rayons, construire  $A'B'$ .

b) On emporte l'objet  $AB$  à l'infini en conservant son diamètre angulaire c'est-à-dire l'angle  $\varepsilon$  sous lequel on le voit depuis  $S$ . Quelle est la taille  $d$  de l'image en fonction de  $R$ , rayon de courbure du miroir, et  $\varepsilon$  diamètre angulaire ?

c) A.N. : On observe le Soleil, l'axe du miroir sphérique concave étant dirigé vers le centre  $S_0$  du Soleil, de diamètre angulaire  $\varepsilon_0 = 31'$  ;  $f = 100$  m (Radiotélescope d'Arecibo, Porto Rico). Calculer  $d$ .

**I.B** - En fait, l'image d'un point objet n'est pas un point image mais une tache. Ce phénomène est dû à la diffraction par les bords du miroir. On pointe l'axe  $Sy$  du radiotélescope sur une étoile ponctuelle  $E$  considérée comme une radiosource émettant une onde plane progressive monochromatique à la longueur d'onde  $\lambda$ , d'amplitude complexe  $A_0 \exp(i(2\pi vt - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0))$  où  $\vec{r}$  est le vecteur position dans une base que l'on choisira et  $t$  le temps.

I.B.1) On suppose que la diffraction due à la taille finie du miroir peut être prise en compte en considérant qu'une pupille carrée, de côté  $2a$ , d'axe  $Sy$  (figure 3) diffracte les rayons au passage avant leur réflexion sur le miroir (**mais pas après**) et que le miroir est de taille illimitée.

a) Quelle est, après diffraction par la pupille et avant réflexion par le miroir, la direction  $\vec{u}$  de la lumière qui vient finalement converger au point  $M(x, z)$  du plan focal, proche de l'axe  $Sy$  ? En déduire l'amplitude complexe  $\underline{a}(x, z, t)$  en ce point  $M(x, z)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $a$ ,  $A_0$  et  $f$ .

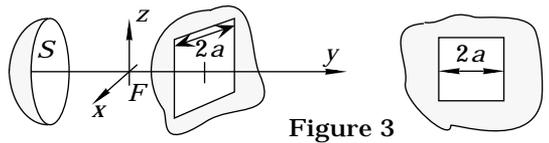


Figure 3

b) Déterminer l'intensité  $I(x, z)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $a$ ,  $f$  et de  $I_0 = \text{Max}(I(x, z))$ . Exprimer les coordonnées des points d'intensité nulle en fonction de  $\lambda$ ,  $f$  et  $a$ . Tracer, pour  $z = 0$ ,  $I(x)$ . Définir la largeur de la tache principale de diffraction.

c) A.N. : radiotélescope d'Arecibo :  $a = 150$  m ;  $f = 100$  m. Calculer les coordonnées des points d'intensité nulle. Quelles sont les dimensions et la forme de la tache principale ? Préciser l'ordre de grandeur de l'intensité des deux premiers maxima secondaires rapportée à celle du maximum principal sur l'axe  $Ox$ .

d) Reprendre les questions I.B.1-a et I.B.1-b en supposant que la radiosource ponctuelle est dans une direction  $\varepsilon$  du plan  $yz$  voisine mais différente de l'axe  $Sy$  du radiotélescope (figure 4). On appréciera une démarche qualitative.

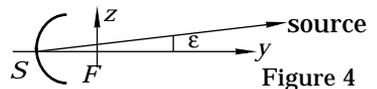


Figure 4

I.B.2) On tient compte à présent de la diffraction par le miroir sphérique. On considère une ouverture circulaire de rayon  $a$ , éclairée sous incidence normale par une onde plane de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude  $A_0$ . L'amplitude alors diffractée à l'infini par

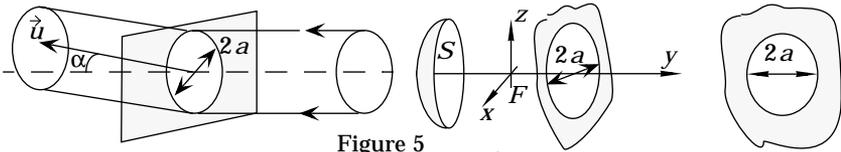


Figure 5

cette ouverture circulaire dans une direction  $\vec{u}$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe de l'ouverture (et donc avec la direction du faisceau incident) (figure 5) est donnée par  $A(\alpha) = A_0 J((2\pi a \sin \alpha)/\lambda)$ . Dans le cas présent, qui concerne la diffraction par un miroir sphérique de rayon d'ouverture  $a$ , on pourra considérer comme au I.B que la diffraction par l'ouverture du miroir a lieu avant la réflexion : la réflexion du faisceau diffracté à l'infini dans une direction  $\vec{u}$  obéit ensuite aux lois de l'optique géométrique. On a représenté la fonction paire  $J(\xi)$  ci-dessous : (figure 6)

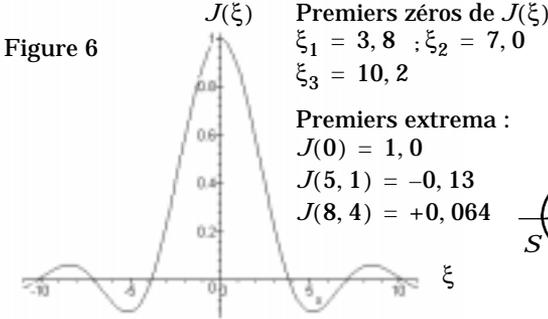
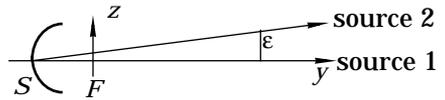


Figure 6

Premiers zéros de  $J(\xi)$   
 $\xi_1 = 3,8$  ;  $\xi_2 = 7,0$   
 $\xi_3 = 10,2$

Premiers extrema :  
 $J(0) = 1,0$   
 $J(5,1) = -0,13$   
 $J(8,4) = +0,064$

Figure 7



a) Quelle est la forme de la tache de diffraction ? Montrer que l'on peut se restreindre à l'étude de l'intensité sur l'axe  $Fx$ . Reprendre les question I.B.1-a, b et c en se limitant aux trois premières régions d'intensité nulle.

b) Comparer les résultats des deux formes de pupilles. La description d'une pupille circulaire par une pupille carrée est-elle légitime pour les phénomènes de diffraction ?

**I.C** - On considère une radiosource double constituée de deux étoiles ponctuelles  $E_1$  et  $E_2$ , émettant des ondes de même intensité, séparées par un écart angulaire  $\epsilon$  (figure 7). Deux points images sont considérés comme séparés si leur distance est supérieure à la demi-largeur de base de la tache principale de diffraction. Le pouvoir séparateur d'un télescope est égal à l'écart angulaire minimal  $\epsilon_{\min}$  entre deux sources ponctuelles pour que ces deux sources soient séparées par l'appareil.

I.C.1) Pourquoi peut-on sommer les intensités fournies par chacune des étoiles ? En assimilant le rayon d'ouverture du miroir à la demi-largeur  $a$  de la pupille carrée introduite au I.B, déterminer en fonction de  $\lambda$  et  $\epsilon$  le rayon d'ouverture minimal  $a_0$  d'un télescope ayant un pouvoir séparateur suffisant pour distinguer les sources 1 et 2.

I.C.2) La galaxie du Cygne contient deux radiosources ponctuelles séparées d'un angle  $\epsilon = 85''$ . Calculer  $a_0$ . Commenter le résultat. Quelle autre raison peut expliquer le gigantisme de certains radiotélescopes ?

I.C.3) En suivant le même raisonnement, quel serait l'ordre de grandeur du pouvoir séparateur d'un télescope optique utilisant la lumière visible dont le rayon d'ouverture

du miroir serait  $a = 1$  m (téléscope Hubble) ? Commenter. Connaissez-vous cependant un intérêt à l'exploration du domaine des ondes radio en astronomie ?

Partie II - Interféromètre à deux antennes

Le gigantisme du radiotélescope unique posant un problème de coût, on envisage un ensemble de deux radiotélescopes **identiques**, de rayon d'ouverture  $a = 5$  m, et dont les foyers sont distants de  $L$  (figure 8). Les miroirs sont montés sur des rails, ce qui permet de faire varier  $L$ .  $O$  est le milieu de  $F_1 F_2$ . On tient compte de la diffraction par chaque miroir sphérique, en utilisant les résultats relatifs à la pupille circulaire (question I.B.2). L'antenne focale de chaque radiotélescope reste centrée sur le foyer principal du miroir. En conséquence, elle délivre un signal  $s_i(0, 0, t)$ , noté simplement  $s_i(t)$ , proportionnel à l'amplitude du champ électrique au point  $F_i$ , ( $i = 1, 2$ ). On associe à ce signal l'amplitude de complexe  $\underline{a}_i(t)$  telle que  $s_i(t) = Re[\underline{a}_i(t)]$ . Deux câbles, d'égale longueur, sont issus des antennes et introduisent un déphasage identique sur les deux voies (figure 9). Ils sont connectés à un sommateur qui délivre donc un signal  $s(t)$  proportionnel à la somme des signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  reçus aux foyers principaux  $F_1$  et  $F_2$ . Un dispositif de traitement du signal, TS, délivre un signal d'intensité  $I = K \langle s(t)^2 \rangle$ .

Figure 8

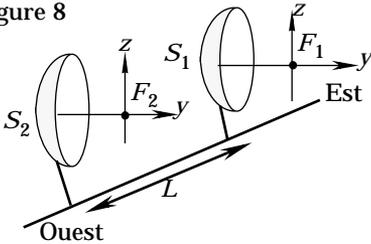
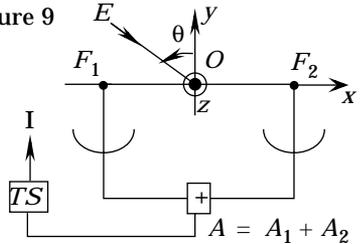


Figure 9



II.A - On observe une source ponctuelle à l'infini qui est supposée être contenue dans le plan équatorial de la Terre. Le système d'axes  $Oxyz$  lié à la Terre est ainsi défini :  $Ox$  est horizontal, dirigé vers l'ouest du lieu d'observation ; le plan  $Oxy$  est parallèle au plan équatorial ;  $Oz$  est parallèle à l'axe des pôles, orienté du sud vers le nord. On pose  $\theta = \text{angle}(0y, OE)$ , angle orienté par  $\vec{u}_z$ .  $L$  est fixe pendant l'observation.

II.A.1-a) Pourquoi  $\theta$  est-il variable ? Dans quel sens se déplace la source ? On prendra pour les applications numériques  $|\dot{\theta}| = 7,25 \times 10^{-5} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

b) Les directions  $S_1 F_1$ ,  $S_2 F_2$  sont parallèles entre elles et à la direction fixe  $Oy$ . Préciser dans quelle direction  $\alpha$  (par rapport à  $\theta$ ) ont été diffractés (avant réflexion) les rayons qui convergent au foyer de chaque miroir. On suppose que  $\theta$  reste faible : dans ces conditions, on admettra que l'expression de l'amplitude diffractée en  $F_i$  par le miroir  $M_i$  est  $A_i(\alpha) = A_0 J((2\pi a \sin \alpha) / \lambda)$ . Pour des valeurs de  $\theta$  faibles, déterminer  $I(\theta)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $a$ ,  $L$ ,  $\theta$  et  $I_0 = \text{Max}(I(\theta))$ . Exprimer l'interfrange  $\Delta\theta$  en fonction de  $\lambda$  et  $L$ . Tracer la courbe  $I(\theta)$ .

c) A.N.  $a = 5$  m ;  $L = 100$  m. Calculer  $\Delta\theta$ . Combien enregistre-t-on de franges dans la tache principale de diffraction ? Quelle est la durée maximale d'observation  $\Delta t$  ? Quelle est la durée  $\tau$  entre la réception de deux maxima consécutifs ?

II.A.2) Les antennes sont à présent orientables : les directions  $S_1 F_1$ ,  $S_2 F_2$  sont parallèles entre elles et à la direction  $OE$  variable dans le temps,  $Ox$  et  $Oy$  restant fixes. Déterminer la nouvelle intensité  $I(\theta)$  et tracer la courbe correspondante. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle de la question précédente ?

**II.B** - On considère une radiosource double constituée de deux points lumineux à l'infini  $E_1$  et  $E_2$  de même intensité, situés dans le plan  $Oxy$ , séparés par un écart angulaire ( $\varepsilon = \text{angle}(OE_1, OE_2)$ )  $> 0$ . On l'observe à l'aide de l'interféromètre à deux antennes orientables de la question précédente. Les antennes sont pointées sur la source  $E_1$ . On supposera que  $a\varepsilon/\lambda \ll 0,6$ .

II.B.1-a) Déterminer  $I(\theta)$  en fonction de  $L$ ,  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  et  $I_1 = \text{Max}(I(\theta)) + \text{Min}(I(\theta))$  pour  $\theta$  faible. À quoi correspond l'approximation  $a\varepsilon/\lambda \ll 0,6$  ?

b) Exprimer l'interfrange  $\Delta\theta$  en fonction de  $\lambda$  et  $L$ . Exprimer le contraste  $C = (I_{\text{max}} - I_{\text{min}})/(I_{\text{max}} + I_{\text{min}})$  en fonction de  $L$ ,  $\varepsilon$  et  $\lambda$ . Tracer la courbe  $I(\theta)$ .

c) A.N. :  $\varepsilon = 85''$  ;  $L = 100$  m ;  $a = 5$  m. L'approximation  $a\varepsilon/\lambda \ll 0,6$  est-elle vérifiée ? Calculer  $\Delta\theta$  et  $C$ .

II.B.2-a) Les miroirs sont mobiles. Comment évolue la figure d'interférence lorsqu'on fait varier  $L$  ? Comment se rend-on compte que l'on observe une radiosource double ?

b) Déterminer le plus petit écart mesurable  $\varepsilon_{\text{min}}$  entre ces sources en fonction de  $L_{\text{max}}$ , distance maximale entre les antennes.

c) Exprimer en fonction de  $L_{\text{max}}$  le diamètre d'ouverture  $2a_0$  d'un radiotélescope ayant même pouvoir séparateur. A.N. : on veut  $\varepsilon_{\text{min}} = 85''$ . Calculer  $L_{\text{max}}$  et  $a_0$ . Quels sont les avantages et inconvénients, à pouvoir séparateur égal, de l'interféromètre à deux antennes sur celui à une seule ? Quelle est l'utilité d'avoir des miroirs mobiles sur les rails ?

d) Les deux sources ont des intensités  $I_1$  et  $I_2$  différentes. Expliquer qualitativement ce qui se passe lorsqu'on fait varier  $L$ .

**II.C** - On revient au cas de la source unique  $E$  : l'étoile  $E$  émet, à présent, une onde plane progressive d'amplitude complexe  $A_0 \exp(i(2\pi\nu t - (\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0(t - (\vec{u} \cdot \vec{r})/c))))$  où la phase à l'origine  $\varphi_0$  peut être variable mais de variation lente devant  $1/\nu$ .  $\vec{r}$  est le vecteur position avec origine en  $O$ . Les antennes sont orientables et orientées vers  $E$  comme dans la question précédente.

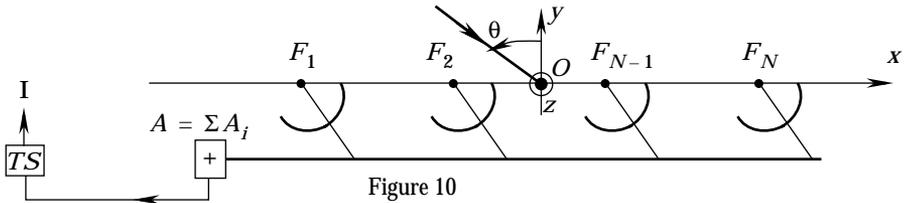
II.C.1) Comment interpréter le fait que  $\varphi_0$  ne dépend que de la variable  $t - (\vec{u} \cdot \vec{r})/c$  ?

II.C.2) Montrer que les amplitudes complexes,  $a_1(F_1, t)$  et  $a_2(F_2, t)$ , des signaux mesurés sont liés par la relation :  $a_1(F_1, t - \tau) = a_2(F_2, t)$  où l'on donnera l'expression de  $\tau$  en fonction de  $L$ ,  $\theta$  et  $c$ . En déduire que l'intensité  $I$  se met sous la forme :  $I(\tau) = (1/2)I_0(1 + \langle \cos 2\pi\nu\tau + \varphi_0(t + \tau) - \varphi_0(t) \rangle)$  quitte à choisir une nouvelle origine des temps.

II.C.3) Que devient  $I(\tau)$  si l'onde incidente est monochromatique, c'est-à-dire que  $\varphi_0(t) = \text{cte}$  ? Retrouve-t-on le résultat de la question II.A.2 ?

Partie III - Interféromètre à  $N$  antennes

Afin d'améliorer le pouvoir séparateur de l'interféromètre à deux antennes, on construit un interféromètre à réseau constitué de  $N$  radiotélescopes, identiques à ceux de l'interféromètre à deux antennes, équidistants de  $L$  (figure 10).  $N$  est pair et on suppose  $L$  fixe. L'antenne focale du radiotélescope numéro  $i$  reste centrée sur le foyer principal  $F_i$  de son miroir. Un système de câbles d'égale longueur et de sommateurs introduisent un déphasage identique sur les  $N$  voies. On obtient donc un signal  $s(t)$  égal à la somme des signaux  $s_i(t)$  reçus aux foyers principaux  $F_i$  (figure 10). Un dispositif de traitement du signal délivre un signal d'intensité  $I = K \langle s(t)^2 \rangle$ . On observe la source  $E$  de la question I.B. On fait pivoter les radiotélescopes de telle sorte que les directions  $S_i F_i$  soient constamment parallèles entre elles et à la direction  $OE$ .



**III.A** - Pour des valeurs de  $\theta$  faibles, déterminer  $I(\theta)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $N$ ,  $L$ ,  $\theta$  et  $I_0 = \text{Max}(I(\theta))$ . Montrer que  $I(\theta)$  présente des maxima principaux et des maxima secondaires. Exprimer l'écart  $\Delta\theta$  entre les maxima principaux en fonction de  $\lambda$  et  $L$ . Exprimer la demi-largeur de base  $\Delta\theta'$  des pics principaux, c'est-à-dire la distance angulaire entre l'abscisse du maxima principal et le minimum nul suivant, en fonction de  $\lambda$ ,  $N$  et  $L$ .

**III.B** - A.N. :  $L = 100$  m ;  $a = 5$  m ;  $N = 16$ . Calculer  $\Delta\theta$  et  $\Delta\theta'$ . Tracer la courbe  $I(\theta)$ . Préciser l'ordre de grandeur de l'ordonnée des deux premiers maxima secondaires rapportée à celle du maximum principal.

**III.C** - À l'aide de l'interféromètre à réseau de la question précédente, on observe la radiosource double  $E_1$  et  $E_2$  de la question I.C. Pour des valeurs de  $\theta$  faibles, déterminer  $I(\theta)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $N$ ,  $L$ ,  $\theta$ ,  $\varepsilon$  et  $I_2 = \text{Max}(I(\theta))$ . Tracer l'allure de la courbe  $I(\theta)$ .

A.N. :  $\varepsilon = 85^\circ$ . Déterminer numériquement l'écart  $\Delta\theta''$  entre deux maxima principaux voisins relatifs à chacune des sources.

**III.D** - On considère que les sources sont séparées si  $\Delta\theta''$  est supérieur à  $\Delta\theta'$ . Exprimer en fonction de  $L$  et  $N$ , le diamètre  $2a_0$  d'un radiotélescope unique ayant même pouvoir séparateur.

**III.E** - A.N. : déterminer numériquement le pouvoir séparateur  $\varepsilon'$  du radiotélescope à réseau et le diamètre  $2a_0$  du radiotélescope à antenne unique équivalent. Commenter les résultats.

Partie IV - Analyse spectrale du signal-spectromètre acousto-optique

On revient au cas du radiotélescope à une seule antenne de la partie I.B. On pointe l'axe  $Sy$  du radiotélescope en direction de l'étoile  $E$  considérée comme une radiosource émettant une onde plane progressive monochromatique à la longueur d'onde  $\lambda$  et l'on recueille, au foyer, le signal (champ électrique)  $s(0, 0, t)$  que l'on notera simplement  $s(t)$ . On a  $s(t) = A_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi)$  avec  $\nu = c/\lambda$ . Ce signal est envoyé vers un spectromètre acousto-optique dont le principe est le suivant (figure 11) : le signal électrique  $s(t)$  est transformé par le transducteur en une onde acoustique plane progressive  $S(X, t)$  où  $S(X, t)$  est un déplacement d'un plan cristallin, qui se propage dans le cristal de niobate de lithium ( $LiNbO_3$ ) dans le sens  $X$  croissant, à la célérité  $c_a = 5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  constante. Le transducteur étant linéaire, on a  $S(-h/2, t) = \kappa s(t)$  où  $\kappa$  est une constante. Le cristal est éclairé sur une largeur  $h = 1 \text{ cm}$ , en incidence normale, par un faisceau laser décrit comme une onde plane progressive monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda_0 = 690 \text{ nm}$  et de pulsation  $\omega_0$ , d'amplitude complexe  $\Psi(X, Y, Z, t) = \Psi_0 \exp(i(\omega_0 t - (2\pi Y)/\lambda_0))$ . Le cristal et le faisceau sont assez larges sur l'axe  $OZ$  pour que l'on puisse restreindre l'étude au plan  $OXY$ . Après le cristal, la lumière est recueillie par une lentille convergente  $L$ , de centre  $O$ , de distance focale image  $f$ . Dans son plan focal image pour  $X > 0$ , est placé un détecteur de lumière CCD qui transforme l'intensité lumineuse reçue en signal électrique. Le cristal, d'épaisseur  $e_0 = 10 \mu\text{m}$ , a les propriétés optiques suivantes :

- il est non absorbant pour la longueur d'onde  $\lambda_0$ .
- l'indice optique  $n(X, t)$  dépend de l'onde acoustique  $S(X, t)$ . On a :  $n(X, t) = n_0(1 + \alpha(\partial S(X, t)/\partial X))$  avec  $n_0 = 1,4$ ,  $\alpha = 10^{-3}$  constants, et  $\alpha \partial S(X, t)/\partial X \ll 1$ .

IV.A - Rôle du cristal

IV.A.1) On s'intéresse à l'onde acoustique dans le cristal. Montrer que le déplacement  $S(X, t)$  se met sous la forme :  $S(X, t) = \kappa A_0 \cos(2\pi\nu(t - X/c_a) + \varphi')$ . Exprimer  $\varphi'$  en fonction de  $\varphi$ ,  $h$ ,  $\nu$  et  $c_a$ . Donner les dimensions de  $\kappa$ .

IV.A.2) On s'intéresse à l'onde lumineuse traversant le cristal.

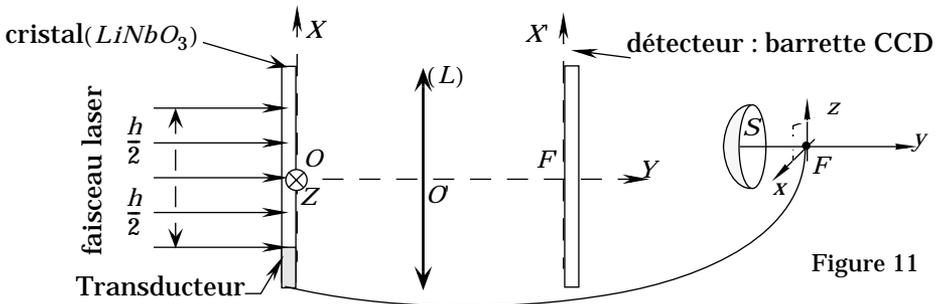


Figure 11

a) Écrire l'amplitude complexe  $\Psi'(X, 0, t)$  de l'onde lumineuse sur la face de sortie du cristal en fonction de l'amplitude complexe de l'onde incidente  $\Psi(X, -e_0, t)$  sur la face d'entrée et de  $\lambda_0, n(X, t), e_0$ . On supposera que l'onde lumineuse se propage toujours suivant l'axe  $OY$  dans le cristal (figure 12).

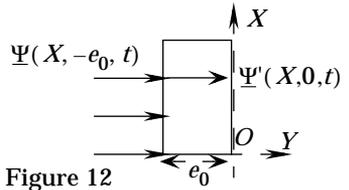


Figure 12

b) En déduire que l'amplitude complexe  $\Psi'(X, 0, t)$  s'écrit :  $\Psi'(X, 0, t) = \Psi_0 \exp(i(\omega_0 t + \varphi_0)) \exp(-i\beta \sin(2\pi\nu((t - X/C_a) + \varphi')))$  et déterminer les expressions de  $\beta$  et  $\varphi_0$  en fonction de  $n_0, \kappa, c_a, A_0, \alpha, \lambda_0$  et  $e_0$ . Donner les dimensions de  $\alpha$  et  $\beta$  et vérifier l'homogénéité de l'expression de  $\beta$ .

c) Développer cette expression au premier ordre en  $\beta$  et mettre l'expression de  $\Psi'$  sous la forme d'une somme de trois exponentielles.

**IV.B - Intensité lumineuse sur le détecteur**

IV.B.1) Le plan du détecteur CCD recueille la lumière diffractée par le plan de sortie du cristal, à un instant donné. Déterminer l'amplitude lumineuse complexe  $\underline{a}'(X', t)$  sur l'axe  $F'X'$  du détecteur en fonction de  $\Psi'(X, 0, t)$ . Calculer l'intégrale dans le cas de l'approximation de la question précédente.

IV.B.2) En déduire l'expression de l'intensité  $I(X')$ . Représenter  $I(X')$ . Déterminer la position des pics principaux et leur largeur de base  $\Delta X'$ . Quels sont le ou les pics d'intensité qui seront mesurés afin d'obtenir l'analyse spectrale ? Justifier. À quel intervalle de l'axe  $X'$  pourrait-on limiter la barette CCD ?

IV.B.3) Ondes radio polychromatiques : l'onde reçue par l'antenne est en fait la somme de deux ondes monochromatiques de même amplitude  $A_0$  et de fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , avec  $\nu_1 < \nu_2$ . Tracer, en le justifiant, le graphe de l'intensité recueillie sur le détecteur.

**IV.C - Résolution du détecteur**

IV.C.1) Le détecteur CCD est constitué d'une barrette de détecteurs individuels carrés (pixels), de côté  $\delta = 20\mu\text{m}$  (figure 13). Quelle est la plus petite différence de fréquences  $\Delta\nu$  mesurable avec ce détecteur ? A.N. :  $f = 10 \text{ cm}$ . Commentaire.

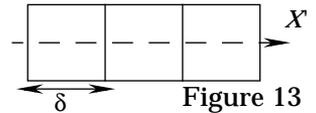


Figure 13

IV.C.2) Sachant que l'on veut analyser des spectres pour des fréquences  $\nu \in [0, 2 \text{ GHz} ; 4 \text{ GHz}]$ , quelle longueur de barrette CCD faut-il utiliser ? Les dimensions conviennent-elles à l'utilisation de ce dispositif sur un satellite ?

••• FIN •••