Le but de ce problème est l'étude des solutions réelles d'une équation différentielle.

Les trois parties de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.

Notations

Pour tout entier relatif k l'intervalle $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ est noté I_k.

On considère les équations différentielles linéaires :

$$(E_0) \qquad \cos(x)(1+\cos^2(x))\ y' + \sin^3(x)\ y = 0$$

$$(E_1) \qquad \cos(x)(1+\cos^2(x))\ y' + \sin^3(x)\ y = \sin(x)\cos(x)$$

Partie I -

I.A -

I.A.1) Montrer que les intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{\cos t(1+\cos^2 t)}\, dt \text{ et } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3 t}{\cos t(1+\cos^2 t)}\, dt \text{ sont divergentes.}$$

I.A.2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \mapsto f(x) = \int_0^x \frac{\sin^3 t}{\cos t(1+\cos^2 t)}\, dt$$

I.B -

I.B.1) Décomposer en éléments simples sur le corps des réels la fraction rationnelle :

$$\frac{1-X}{X(1+X)}$$

I.B.2) À l'aide d'un changement de variables, calculer $f(x)$ pour x appartenant à I_0.

I.C - Résoudre l'équation différentielle (E_0) sur l'intervalle I_k pour tout entier relatif k.

I.D - Existe-t-il des solutions de (E_0) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

I.E - Exprimer les solutions de (E_1) sur I_0 à l'aide des fonctions F_λ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$F_\lambda(u) = \frac{u}{1+u^2} \ln\left(\frac{u}{\lambda}\right) \text{ où } \lambda \text{ est un réel strictement positif.}$$

I.F - L'équation (E_1) admet-elle des solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

I.G - On considère la courbe Γ_λ d'équation $y = F_\lambda(x)$.

I.G.1) Construire la courbe Γ_2.

I.G.2) Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. Montrer que les tangentes D_λ au point d'abscisse a des courbes Γ_λ sont concourantes en un point noté $M(a)$.

I.G.3) Construire le lieu des points $M(a)$ quand a varie.

Partie II - Étude d'une courbe intégrale de (E)

Soit h la fonction définie sur $[-1,1]$ par $h(1) = h(-1) = 0$ et pour tout x appartenant à $]-1, 1[$:

$$h(x) = \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

II.A - Montrer que la fonction h est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ (on pourra faire une démonstration par récurrence).

II.B -

II.B.1) Étudier le signe de $h''(x)$, pour x appartenant à $[-1,1]$ et en déduire que $\forall x \in -1,1,\ |h'(x)| < 1$.

II.B.2) Étudier les variations de h sur $[-1,1]$.

II.B.3) Montrer qu'il existe un et un seul réel L appartenant à $[-1,1]$ tel que $h(L) = L$. On pose $\alpha = \mathrm{Arccos}(L)$.

II.C - Étudier la suite définie par : $u_0 \in [\,0, 1\,[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers L. Montrer que L est compris entre les valeurs de deux termes consécutifs de la suite.

II.D - Donner un algorithme permettant de calculer pour un entier donné p la valeur de u_p.

Application : si $u_0 = 0$ donner une valeur approchée de u_{10} et u_{11} puis justifier l'inégalité : $|L - u_{10}| \le |u_{11} - u_{10}|$.

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

II.E - On définit la fonction g sur I_0 par $g(x) = F_1(\cos x)$, (où F_1 est défini à la question I.E).

II.E.1) Vérifier que $g'(\alpha) = 0$.

II.E.2) Étudier les variations de g.

II.E.3) Construire la représentation graphique de g en prenant comme unité 5 centimètres et préciser les tangentes aux points d'abcsisse 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Partie III - Développement en série de Fourier d'une solution de (E_0)

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \dfrac{2\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$.

III.A -

III.A.1) Montrer que G est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

III.A.2) Prouver qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(2n+1)x$$

(on ne demande pas de calculer les valeurs de α_n).

III.B - On considère la fraction rationnelle :

$$H(X) = \frac{1+X}{X^2+6X+1}$$

III.B.1) Montrer que $G(t) = 4e^{it}H(e^{2it})$.

III.B.2) Décomposer $H(X)$ en éléments simples. On posera $c = 3-2\sqrt{2}$. Quelle est la valeur de A pour laquelle :

$$H(X) = A\left[\frac{1}{X+c} + \frac{1}{cX+1}\right]$$

III.C - En déduire, grâce à des développements en séries entières par rapport à X ou à $\frac{1}{X}$, le développement en série de Fourier de G et la valeur des termes de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

III.D - Quel est le développement en série de Fourier de la fonction G_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin(x)}{\sqrt{2}-\sin(x)}\right)$$

••• FIN •••
