MATHÉMATIQUES II

On se propose dans ce problème d'étudier une méthode de calcul approché des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle.

Notations : On désigne par $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, par $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques, par $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre n et par $O_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales directes (i.e. dont le déterminant vaut 1).

On désigne par $diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ la matrice diagonale d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que la matrice A de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ a pour coefficient $a_{i,j}$ en i-ème ligne et j-ème colonne. Dans ce cas, la transposée de A sera notée ${}^tA$ et la trace de A définie par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Liens entre les parties du problème : La partie I sert dans tout le problème. La partie II traite d'un cas particulier que l'on aura intérêt à traiter soigneusement avant de poursuivre. La partie IV est indépendante de ce qui précède et sert dans V.D - .

Partie I - Une norme sur $Mat(n, \mathbb{R})$

I.A - Montrer que pour tout couple de matrices carrées (A, B),

$(Tr(AB)) = Tr(BA)$.

I.B - Montrer que l'application

$\phi : Mat(n, \mathbb{R}) \times Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par : $\phi(A, B) = Tr(A\,{}^tB)$

Filière MP

est un produit scalaire ; calculer en particulier $\phi(A, A)$. On note $\| \ \|$ la norme associée à ϕ. Exprimer $\|A\|^2$ en fonction des $(a_{i,j})$.

I.C - Montrer que pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de $Mat(n, \mathbb{R})$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

En déduire la norme de l'application $Tr : Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (norme subordonnée à la norme $\| \ \|$).

I.D - Soit Ω un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice A, $\|\Omega A\| = \|A\|$. Prouver que si A est une matrice symétrique, la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ est elle-même symétrique et que l'on a, en notant $(b_{i,j})$ les coefficients de B :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 .$$

Partie II - Diagonalisation pour $n = 2$

Soient A une matrice de $S_2(\mathbb{R})$, et Ω une matrice de $O_2^+(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} .$$

On pose $B = {}^t\Omega A \Omega = (b_{i,j})$.

II.A - Calculer les termes de la matrice B.

II.B - Montrer que

$$\sum_{i=1}^{2} b_{i,i}^2 + 2b_{2,1}^2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i,i}^2 + 2a_{2,1}^2 .$$

II.C - On suppose ici que $a_{1,2} \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, et un seul, tel que $b_{2,1} = 0$ (penser à distinguer deux cas).

Définir la fonction F qui, à une matrice symétrique non diagonale de $S_2(\mathbb{R})$, associe le réel θ ainsi défini.

II.D - Montrer que pour ce choix de θ, la matrice B est diagonale et que $b_{1,1}$ et $b_{2,2}$ sont les valeurs propres de A.

II.E - On donne

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calculer $\theta = F(A)$ puis la matrice B. En déduire les éléments propres de A.

Partie III - Quelques résultats généraux

On définit, pour θ réel, p et q entiers donnés (avec $p < q$), une matrice $\Omega = (\omega_{i,j})$ de $Mat(\mathbb{R}, n)$ en posant :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\theta) & \dots & \sin(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\sin(\theta) & \dots & \cos(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

où $\omega_{p,p} = \omega_{q,q} = \cos(\theta)$, $\omega_{p,q} = \sin(\theta)$ et $\omega_{q,p} = -\sin(\theta)$.
On considère $A = (a_{i,j})$ une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^t\Omega A \Omega$.

III.A - Justifier que $B = (b_{i,j})$ est symétrique et que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 .$$

III.B - Calcul des coefficients de B

III.B.1) Soit $M = (m_{i,j}) = A\Omega$. Exprimer, en fonction de θ et des coefficients de A, les coefficients $m_{i,j}$, $m_{i,p}$ et $m_{i,q}$ lorsque j est un élément de $[1, n]$ distinct de p et de q, i est quelconque dans $[1, n]$.

III.B.2) Exprimer, en fonction des coefficients de A et de θ les coefficients $b_{i,j}$, puis $b_{i,p}$, $b_{i,q}$ pour i, j tous deux différents de p et de q, ainsi que $b_{p,q}$, $b_{p,p}$ et $b_{q,q}$.

III.B.3) Donner une relation simple entre les matrices.

$$\begin{bmatrix} b_{p,p} & b_{p,q} \\ b_{q,p} & b_{q,q} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} a_{p,p} & a_{p,q} \\ a_{q,p} & a_{q,q} \end{bmatrix}.$$

En déduire que

$$b_{p,p}^2 + b_{q,q}^2 + 2b_{p,q}^2 = a_{p,p}^2 + a_{q,q}^2 + 2a_{p,q}^2 .$$

III.B.4) On suppose que $a_{p,q}$ est non nul, montrer qu'il existe un réel $\theta_{p,q}$ appartenant à $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ et un seul, tel que $b_{p,q} = 0$.

Partie IV - Suites dans espace vectoriel normé de dimension finie

Soit E un espace vectoriel normé, de dimension finie, dont la norme est notée $\| \|$.

IV.A - On se propose de montrer le résultat suivant : une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace normé $(E, \| \|)$ telle que :

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, (1)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérences, (2)

$\lim_{n \to \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$, (3)

est convergente.

On considère donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés (1), (2) et (3) et M un entier strictement supérieur à 1 ; on note a_μ pour $1 \le \mu \le M$, les valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

IV.A.1) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} , \forall k \in \mathbb{N} , k \ge n_\varepsilon \Rightarrow x_k \in \bigcup_{\mu=1}^{M} B(a_\mu, \varepsilon) ,$$

où $B(a_\mu, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre a_μ et de rayon ε.

IV.A.2) En déduire, par un choix judicieux de ε, qu'il existe $\mu \in [1, M]$ et un entier n_0 tels que : $k \ge n_0 \Rightarrow x_k \in B(a_\mu, \varepsilon)$, et conclure.

Partie V - Méthode de Jacobi : une suite de matrices convergeant vers une diagonalisée de A

Soit A un élément de $S_n(\mathbb{R})$. On note $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ses valeurs propres, éventuellement répétées avec leur multiplicité.

On définit par récurrence une suite de matrices $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$ en posant $A_0 = A$, et $A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ où Ω_k est construite de la façon suivante :

si A_k est diagonale, Ω_k est la matrice unité,

sinon la matrice Ω_k est définie comme dans la partie III, en choisissant :

(1) deux entiers p et q tels que $p<q$ et $a_{p,q}^{(k)} = \sup\limits_{i\neq j} \left|a_{i,j}^{(k)}\right|$

(2) $\theta = \theta_k$, dans $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $\operatorname{cotan}(2\theta_k) = \dfrac{a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)}}{2a_{p,q}^{(k)}}$.

On observera que p et q dépendent de k et on pourra noter, si le besoin s'en fait sentir, $p = p_k$ et $q = q_k$.

V.A - Donner une conséquence du choix de θ_k pour la matrice A_{k+1}.

V.B - On pose $A_k = D_k + B_k$ avec $D_k = diag(a_{i,i}^{k})$ et $\varepsilon_k = \|B_k\|^2$, la norme étant définie comme dans la partie I.

V.B.1) Montrer que $\varepsilon_k \leq n(n-1)\left|a_{p,q}^{(k)}\right|^2$.

V.B.2) Montrer, en utilisant la question III.B.3, que $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2\left|a_{p,q}^{(k)}\right|^2$.

V.B.3) En déduire que

$$\varepsilon_{k+1} \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)\varepsilon_k \text{, puis que } \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0 .$$

Que peut-on dire de la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans l'espace normé $(Mat(\mathbb{R},n),\|\ \|)$?

V.C - On veut montrer que la suite des matrices diagonales $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérence dans $E = (Mat(\mathbb{R},n),\|\ \|)$, qui sont toutes des matrices de la forme $diag(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$ où la suite finie $(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$ est obtenue par permutation des valeurs propres de A. Pour cela considérons une suite extraite que nous noterons $(D_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une matrice Δ dans l'espace E ($(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ désigne une suite d'entiers naturels strictement croissante).

V.C.1) Montrer que la limite Δ est une matrice diagonale.

V.C.2) Montrer que A et Δ ont le même polynôme caractéristique.

V.C.3) Conclure.

V.D - Convergence de la méthode

V.D.1) Montrer que la suite (D_k) est bornée et que $\lim_{k \to \infty} (D_{k+1} - D_k) = 0$.

V.D.2) Montrer que les suites (D_k) et (A_k) convergent dans $(Mat(\mathbb{R}, n), \| \|)$ et dire en quoi l'algorithme ainsi défini permet d'obtenir une valeur approchée des valeurs propres de A.

Partie VI - Étude d'un exemple pour $n = 3$

On donne ici

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 12 \\ 3 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$, et on définit la suite A_k comme dans V - .

VI.A - Déterminer θ_0 puis Ω_0. Donner les valeurs rationnelles des coefficients $(a_{i,j}^{(1)})$.

VI.B - Calculer de la même façon θ_1, Ω_1 et les coefficients $(a_{i,j}^{(2)})$ de A_2.

VI.C - Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. Observation ?

••• FIN •••