MATHÉMATIQUES I

Partie I -

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0, \pi]$, que l'on munit du produit scalaire

$$(f, g) \to (f \mid g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) g(t) dt$$

et des normes

$$f \to \|f\|_1 = \int_0^{\pi} |f(t)| dt ,$$

$$f \to \|f\|_2 = \sqrt{(f \mid f)} ,$$

$$f \to \|f\|_\infty = \sup_{0 \le t \le \pi} |f(t)| .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n (respectivement s_n) la fonction définie sur $[0, \pi]$ par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ (respectivement $s_n(t) = \sin(nt)$).

Pour tout $f \in E$, on note $\hat{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire, coïncidant avec f sur l'intervalle $[0, \pi]$ et $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, coïncidant avec f sur l'intervalle $]0, \pi[$ et vérifiant la condition suivante : en tout point x de $\mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{h \to 0, h > 0} (\tilde{f}(x+h) + \tilde{f}(x-h)) \right).$$

I.A -

I.A.1) On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par la formule

$$f(t) = -2t + \pi .$$

Représenter graphiquement les fonctions $\hat{f}$ et $\tilde{f}$.

I.A.2) Soit f un élément de E. Montrer (soigneusement) que la fonction $\hat{f}$ est définie et continue, et que la fonction $\tilde{f}$ est définie et continue par morceaux. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\tilde{f}$ soit continue.

Filière PC

I.B -

I.B.1) Soit f un élément de E.

Montrer que sur l'intervalle $[0, \pi]$, le problème aux limites

$$\begin{cases} y'' = -f \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule notée Tf.

Indication : si on désigne par

$$F_0 : t \mapsto \int_0^t f(u)du$$

la primitive de f sur $[0, \pi]$ s'annulant en 0, on pourra exprimer Tf à l'aide d'intégrales comportant F_0.

L'objet du problème est d'étudier l'application T.

I.B.2) Déterminer précisément Tf lorsque f est la fonction définie au I.A.1) et en donner une représentation graphique.

Partie II - Valeurs propres et vecteurs propres de T

II.A - Montrer que l'application $T : f \to Tf$ est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.

II.B - Pour tout entier naturel n, calculer Tc_n.

II.C - Vérifier que, pour tout couple (f_1, f_2) d'éléments de E,

$$(Tf_1 | f_2) = (f_1 | Tf_2)$$

Que peut-on dire de $(f_1 | f_2)$ lorsque f_1 et f_2 sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?

II.D - Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

II.E - On note $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

II.E.1) Montrer que S est une famille orthonormale.

II.E.2) Soit f un élément de E. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} (f|s_n)s_n .$$

Que représente f_N pour la fonction 2π-périodique $\tilde{f}$?

En conclure que : $\lim_{N \to +\infty} \|f - f_N\|_2 = 0$.

Déduire de là que, si f est orthogonal à S, la fonction f est nulle.

II.F - On note C l'ensemble des c_n lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

II.F.1) La famille C est-elle orthonormale ?

II.F.2) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$h_N = \frac{1}{2}(f|c_0) + \sum_{n=1}^{N} (f|c_n)c_n ,$$ où f est un élément de E. Montrer que

$$\lim_{N \to +\infty} \|f - h_N\|_2 = 0 .$$

Que peut-on dire si f est orthogonal à C ?

Partie III - Représentation intégrale de T

III.A - Soit f un élément de E. En écrivant la formule de TAYLOR avec reste intégrale à l'ordre 1 entre 0 et x puis entre 0 et π, montrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$Tf(x) = \int_0^{\pi} k(x, t)f(t)dt \text{ , où}$$

$$k(x, t) = \begin{cases} \dfrac{t(\pi - x)}{\pi} & \text{si} \quad 0 \le t \le x \\[2ex] \dfrac{x(\pi - t)}{\pi} & \text{si} \quad 0 \le x < t \le \pi \end{cases}$$

III.B - Montrer que k est l'unique fonction définie sur le carré $[0, \pi] \times [0, \pi]$ séparément continue en x et en t satisfaisant à la condition

$$Tf(x) = \int_0^{\pi} k(x, t)f(t)dt \text{ pour tout } f \in E \text{ et pour tout } x \in [0, \pi] .$$

III.C -

III.C.1) Démontrer que la fonction k admet un maximum M atteint en un point unique A de $[0, \pi] \times [0, \pi]$ et déterminer M et A (pour x fixé dans $[0, \pi]$, on pourra commencer par étudier la fonction $t \to k(x, t)$ sur $[0, \pi]$).

III.C.2) En déduire que, pour tout $f \in E$,

$$\|Tf\|_\infty \leq \frac{\pi}{4}\|f\|_1 . \tag{1}$$

III.C.3) En considérant la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ où

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}t\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{2}{\pi}(\pi - t)\right)^n & \text{si } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$$

et en calculant $Tf_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\|f_n\|_1$ montrer que l'inégalité (1) ne peut être améliorée.

III.D -

III.D.1) Prouver que, pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0, \pi]$,

$$|Tf(x)| \leq \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}}\|f\|_2 .$$

Conclure que

$$\|Tf\|_\infty \leq \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}}\|f\|_2 .$$

III.D.2) Soient f un élément de E et $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de E telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0 .$$

Prouver que la suite $(T\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers la fonction Tf.

III.D.3) <u>Application</u> : prouver que, pour tout $f \in E$,

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(f|s_n)s_n$$

et que la série du second membre converge normalement sur $[0,\pi]$.

En déduire que pour tout couple (x,t) de points de $[0,\pi]$,

$$k(x, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)\sin(nt)}{n^2} .$$

III.D.4) Déduire de la question précédente que pour tout $f \in E$, $\|Tf\|_2 \leq \|f\|_2$ et préciser les fonctions pour lesquelles il y a égalité.

III.E -

III.E.1) A l'aide du II.F donner une nouvelle expression de Tf comme somme d'une série de fonctions.

III.E.2) En déduire une nouvelle écriture de k comme somme d'une série de fonctions, en utilisant la famille (c_n).

Partie IV - La suite des itérés de l'endomorphisme T

On définit la suite $(T^n)_{n \geq 1}$ par la condition initiale $T^1 = T$ et la relation de récurrence

$$T^{n+1} = T^n \circ T .$$

IV.A - On pose, pour tout $f \in E$ et tout $n \geq 1$,

$$T_n f = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} (f | s_p) s_p .$$

IV.A.1) Démontrer que la série du second membre converge normalement sur l'intervalle $[0, \pi]$.

IV.A.2) Prouver que $T^n f = T_n f$, pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.B - Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de T^n.

IV.C -

IV.C.1) Soit f un élément de E. Montrer que la suite de fonctions $(T^n f)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction que l'on déterminera ;

(il pourra être utile d'étudier le comportement de la suite

$$\left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} \right)_{n \geq 1}$$ lorsque n augmente indéfiniment).

IV.C.2) Donner l'expression explicite de la limite de $(T^n f)$ lorsque f est la fonction définie au I.A.1).

••• FIN •••