MATHÉMATIQUES I

Le but de ce problème est de définir et d'étudier, de différentes manières, la constante d'Euler. Les quatre parties proposées sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres.

Partie I -

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i}, \; u_n = S_n - \ln n, \; v_n = S_{n-1} - \ln n .$$

I.A - Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, \; x + \ln(1-x) \leq 0, \; x - \ln(1+x) \geq 0$.

I.B - Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera γ leur limite commune.

Montrer, de plus, que : $\forall n \geq 2, v_n \leq \gamma \leq u_n$.

I.C - En déduire une valeur approchée de γ à 10^{-1} près.

I.D - Posons : $\forall n \geq 2$,

$$w_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n} .$$

Montrer que la série de terme général w_n est convergente et que l'on a :

$$u_p - \gamma = \sum_{n=p+1}^{n=+\infty} w_n .$$

I.E - Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout réel non nul t, on pose :

$$f(t) = \frac{1}{t} .$$

I.E.1) Soit g la fonction affine définie sur l'intervalle $[k-1, k]$ par :

$$g(k-1) = f(k-1), \; g(k) = f(k) .$$

Calculer :

$$\int_{k-1}^{k} g(t)dt .$$

Filière TSI

I.E.2) Montrer qu'il existe une et une seule fonction h, affine sur chaque intervalle $\left]-\infty, k-\frac{1}{2}\right[$, $\left[k-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, telle que :

$$h(k-1) = f(k-1)\,,\ h(k) = f(k)\,,\ h'(k-1) = f'(k-1)\,,\ h'(k) = f'(k)\,.$$

I.E.3) Que peut-on dire de la continuité de h ?

I.E.4) Calculer :

$$\int_{k-1}^{k} h(t)dt\,.$$

I.F - Montrer que :

$$\forall t \in [k-1, k], h(t) \le f(t) \le g(t)\,.$$

I.G - Etablir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \le \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \le \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k}\,.$$

I.H - En déduire un encadrement de $u_n - \gamma$, pour $n \ge 2$.

I.I - Donner une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Partie II -

II.A - Montrer l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt\,.$$

II.B - En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx$$

$$u_n = \int_0^1 \left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\frac{dx}{x} - \int_1^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{dx}{x}\,.$$

II.C - Démontrer les inégalités suivantes :

II.C.1) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$1 + x \leq e^x .$$

II.C.2) $\forall x \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} .$$

II.C.3) $\forall x \in [0, n]$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x .$$

II.C.4) $\forall x \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n} .$$

N.B. : on pourra commencer par démontrer que :

$$\forall u \in [0, 1], (1 - u)^n - 1 + nu \geq 0 .$$

II.C.5) $\forall x \in [0, n]$,

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x} .$$

II.D - Montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

converge et que l'on a :

$$\gamma = \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx .$$

Partie III -

On pose : $\forall x > 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} .$$

III.A - Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.B - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi(x) dx$ est convergente.

III.C - On pose, pour $n \geq 2$:

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx .$$

Montrer que $I_n(a)$ existe, pour tout $a > 0$, et que l'on a :

$$\forall a > 0\,,\ I_n(a) = \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x}dx = \ln n - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x}dx\ .$$

III.D - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}dx$ est convergente et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}dx = \ln n\ .$$

III.E - Montrer que :

$$v_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx})\varphi(x)dx\ .$$

III.F - En déduire que :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)dx\ .$$

Partie IV -

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\,,\ \phi(P)(X) = P(X+1) - P(X)\ .$$

Soit ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$, considérée comme endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV.A - Déterminer $\operatorname{Ker}\phi$, $\operatorname{Ker}\phi_n$, $\operatorname{Im}\phi_n$, $\operatorname{Im}\phi$.

IV.B - Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P_p de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\phi(P_p)(X) = X^p\,,\ P_p(0) = 0\ .$$

IV.C - Soit, pour $p \geq 1$, $Q_p(X) = P'_p(X) - P'_p(0)$.

IV.C.1) Calculer $\phi(Q_p)$.

IV.C.2) En déduire l'égalité :

$$Q_p(X) = p \cdot P_{p-1}(X)\,,\ \forall p \geq 1\ .$$

IV.D - Déterminer les polynômes P_p, pour $0 \leq p \leq 5$.

IV.E - Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1]\,,\ -\frac{1}{128} \leq P_5(x) \leq 0\ .$$

IV.F - Pour k, $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_p(k) = \int_0^1 \frac{pP_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}} dt .$$

IV.F.1) Déterminer une relation de récurrence entre $I_p(k)$ et $I_{p+1}(k)$.

IV.F.2) Calculer $I_1(k)$.

IV.F.3) Donner une expression de $I_6(k)$ en fonction de $I_1(k)$.

IV.F.4) Etablir les inégalités suivantes :

$$-\frac{1}{128}\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(1+k)^6}\right) \leq I_6(k) \leq 0 .$$

IV.F.5) A l'aide de la question I.D, en déduire un encadrement de $u_n - \gamma$.

IV.F.6) Donner les dix premières décimales de γ.

••• FIN •••
