MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ désigne le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté à son repère orthonormé canonique $(O;\vec{I},\vec{J})$. On note i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Si $z \in \mathbb{C}$, on note $M(z)$ l'image de z dans $\mathcal{E}$. Si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on note $M_n(K)$ l'espace vectoriel sur K des matrices de taille (n,n) à coefficients dans K et $S_n(K)$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques. On note $\mathbb{C}^2$ le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel des vecteurs colonnes complexes de taille $(2,1)$.

Enfin, si $M = \langle m_{i,j}\rangle_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est une matrice carrée à coefficients complexes de taille (n,n), on note $\mathrm{tr}(M)$ la trace, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

Le plus souvent, il sera possible, si nécessaire, d'admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

Partie I - Triplets harmoniques.

I.A -

I.A.1) Déterminer la dimension de $S_2(\mathbb{C})$; on prouvera soigneusement le résultat annoncé.

Soit M et N inversibles et dans $S_2(\mathbb{C})$, on dit que M est **harmonique** relativement à N s'il existe une base (X,X') de $\mathbb{C}^2$ telle que ${}^tXMX = {}^tX'MX' = 0$ et ${}^tXNX' = 0$.

I.A.2) Soit M et N deux matrices inversibles de $S_2(\mathbb{C})$ et P une matrice inversible de $M_2(\mathbb{C})$. Montrer que ${}^tPMP$ et ${}^tPNP$ sont deux matrices inversibles de $S_2(\mathbb{C})$.

Si, de plus, M est harmonique relativement à N, montrer que ${}^tPMP$ est harmonique relativement à ${}^tPNP$.

On suppose dans les deux questions qui suivent que M et N sont inversibles et dans $S_2(\mathbb{C})$, avec

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Filière TSI

I.B -

I.B.1) On suppose que M est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Montrer que $b \neq 0$; on pose $\mathcal{I} = \{X \in \mathbb{C}^2 \mid {}^tXMX = 0\}$.

Montrer que $\mathcal{I}$ est la réunion de deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, puis décrire les bases (X,X') de $\mathbb{C}^2$ telles que X et X' soient dans $\mathcal{I}$. En déduire que M est harmonique relativement à N si et seulement si $\alpha c = 2b\beta$.

I.B.2) On suppose que M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \text{ avec } a \neq 0.$$

On note d une racine carrée de $b^2 - ac$. En utilisant les scalaires a, b, c, d déterminer $\{X \in \mathbb{C}^2 \mid {}^tXMX = 0\}$. En s'inspirant du I.B.1, montrer que M est harmonique relativement à N si et seulement si $\alpha c + \gamma a = 2\beta b$.

I.B.3) En conclure que M est harmonique relativement à N si et seulement si N est harmonique relativement à M.

I.C - Montrer que M est harmonique relativement à N si et seulement si $\mathrm{tr}(N^{-1}M) = 0$.

Vu la symétrie de la propriété, si M est harmonique relativement à N, nous dirons jusqu'à la fin de cette partie que M et N sont **conjuguées harmoniques**.

I.D - Pour $N \in S_2(\mathbb{C})$ donnée, avec N inversible, on pose

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in S_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(N^{-1}M) = 0 \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $S_2(\mathbb{C})$; en déterminer la dimension ; déterminer $\mathcal{H} \cap \mathrm{Vect}(N)$; donner un supplémentaire de $\mathcal{H}$ dans $S_2(\mathbb{C})$.

I.E - Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, M_2, \ldots, M_k$ dans $S_2(\mathbb{C})$, inversibles, telles que M_i et M_j soient conjuguées harmoniques chaque fois que $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$, $i \neq j$. Une telle famille sera dite **harmonique**.

I.E.1) Dans une famille harmonique, montrer qu'aucune matrice n'est combinaison linéaire des autres.

I.E.2) En conclure que k est inférieur ou égal à 3 et que tout triplet harmonique, c'est-à-dire toute famille harmonique à trois éléments, est une base de $S_2(\mathbb{C})$.

La fin de cette partie consiste en la détermination de l'ensemble des triplets (A, B, C) harmoniques.

I.F - On suppose dans cette question que A est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda \neq 0 \text{ et } \mu \neq 0 .$$

Montrer que, pour que (A, B, C) soit harmonique, il est nécessaire que B et C soient respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta \\ \beta & -\alpha\mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha'\lambda & \beta' \\ \beta' & -\alpha'\mu \end{pmatrix}.$$

Inversement, A, B, C étant de cette forme, déterminer une CNS sur α, α', β, β' pour que le triplet (A, B, C) soit harmonique. Si A est de la forme ci-dessus, en déduire tous les couples (B,C) tels que (A, B, C) soit harmonique. Dans le cas particulier où les matrices A, B, C sont à coefficients réels, déterminer le signe de $\det B \times \det C$ (on distinguera les cas $\det A > 0$ et $\det A < 0$).

I.G - Soit (A_0, B_0, C_0) un triplet harmonique et $P \in M_2(\mathbb{C})$, avec P inversible. Montrer que le triplet $({}^tPA_0P, {}^tPB_0P, {}^tPC_0P)$ est harmonique. En déduire une description de l'ensemble de tous les triplets harmoniques (on utilisera sans démonstration le résultat suivant : si $A \in S_2(\mathbb{C})$, il existe P inversible de $M_2(\mathbb{C})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale). Dans le cas où $A \in S_2(\mathbb{R})$, dire pourquoi on peut prendre $P \in M_2(\mathbb{R})$ et ${}^tPAP = D$ diagonale réelle.

Dans le cas particulier où les matrices A, B, C sont à coefficients réels, montrer que A, B, C ne peuvent avoir toutes trois un déterminant < 0.

I.H - Déterminer $\{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \forall S \in S_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(SM) = 0\}$.

Soit alors (A, B, C) un triplet harmonique quelconque ; montrer qu'on peut le compléter en une base (A, B, C, D) de $M_2(\mathbb{C})$, où D est inversible et vérifie

$$\mathrm{tr}\,(A^{-1}D) = \mathrm{tr}\,(B^{-1}D) = \mathrm{tr}\,(C^{-1}D) = 0 .$$

Partie II - Propriétés géométriques

II.A - On se limite dans les questions qui suivent au cas particulier du triplet harmonique (A, B, C) suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \text{ où } b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

On considère les deux équations suivantes :

$$z^2 + 2bz + 1 = 0 \tag{1}$$

$$bz^2 + 2z + b = 0 \tag{2}$$

II.A.1) Montrer que ni (1) ni (2) n'ont 1 ou -1 comme solution ; montrer que (1) et (2) n'ont pas de solution commune.

On note d une racine carrée de $b^2 - 1$, et on pose

$$z_1 = -b + d, \; z'_1 = -b - d, \; z_2 = \frac{-1 + id}{b}, \; z'_2 = \frac{-1 - id}{b}$$

(ce sont les solutions respectives de (1) et (2)).

II.A.2) Montrer que :

$$\forall i \in \{1,2\}, \frac{z_i - 1}{z_i + 1} = -\frac{z'_i - 1}{z'_i + 1}.$$

Exprimer $(z_2 - z_1)(z'_2 - z'_1) + (z_2 - z'_1)(z'_2 - z_1)$ à l'aide de

$p_1 = z_1 z'_1$, $p_2 = z_2 z'_2$, $s_1 = z_1 + z'_1$, et $s_2 = z_2 + z'_2$.

En conclure que : $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - z'_1} = -\dfrac{z'_2 - z_1}{z'_2 - z'_1}$.

II.A.3) On définit $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ par $\varphi(z) = \dfrac{z - i}{1 - zi}$.

Déterminer $\varphi(\varphi(z))$ quand cette expression a un sens.

II.A.4) Simplifier l'expression $b(\varphi(z))^2 + 2\varphi(z) + b$ pour $z \neq -i$.

En conclure que $z \neq -i$ est solution de (1) si et seulement si $\varphi(z)$ est solution de (2).

II.B - On note respectivement P, P', Q, Q', R, R' les images des complexes 1, -1, z_1, z'_1, z_2, z'_2 dans $\mathcal{E}$.

II.B.1) Montrer qu'un cercle $(\mathcal{C})$ de $\mathcal{E}$ passe par P et P' si et seulement s'il a une équation de la forme

$F(x, y) = z\bar{z} - t\dfrac{z - \bar{z}}{2i} - 1 = x^2 + y^2 - ty - 1 = 0$ où $t \in \mathbb{R}$ et où on a posé

$z = x + iy$.

Si $x+iy \in \mathbb{C}^*$, on pose $X+iY = \dfrac{1}{x+iy}$. Donner une relation simple entre $F(x, y)$ et $F(X, Y)$.

En conclure que pour $z \neq 0$ $M(z) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $M(\frac{1}{z}) \in \mathcal{C}$.

II.B.2) Montrer que P, P' et Q ne sont pas alignés. En choisissant pour $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle $PP'Q$ montrer que P, P', Q, Q' sont sur un même cercle $\mathcal{C}_1$, et de même montrer que P, P', R, R' sont sur un même cercle $\mathcal{C}_2$.

II.B.3) On définit $\psi : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ par $\psi(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

Déterminer le polynôme unitaire de degré 2, noté q_1, dont les zéros sont $\psi(z_1)$ et $\psi(z'_1)$ et celui, noté q_2, dont les zéros sont $\psi(z_2)$ et $\psi(z'_2)$ (chacun de ces polynômes est de la forme $z^2 + w_i = 0$, où le coefficient w_i est fonction de b seul).

En déduire que les images de ces quatre complexes sont les sommets d'un carré Γ de centre O.

Montrer que, les quatre points $M(\psi(z_i))$ et $M(\psi(z'_i))$, $i \in \{1, 2\}$ sont situés sur un même cercle dont une équation est $z\bar{z} - e^2 = 0$ pour un certain réel e. En déduire que, sauf dans un cas particulier que l'on mettra en évidence, les quatre points Q, Q', R, R' sont situés sur un même cercle.

II.B.4) On pose $\omega = \dfrac{z_1 + \overline{z_1}}{1 + z_1\overline{\overline{z_1}}}$ et $T = M(\omega)$.

Déterminer un réel λ tel que $\overrightarrow{TQ'} = \lambda\overrightarrow{TQ}$. En déduire le point d'intersection des droites (PP') et (QQ'). Montrer que les droites (PP'), (QQ') et (RR') sont concourantes (on pourra regarder ce que devient ω lorsque l'on remplace z_1 par $\varphi(z_1)$, et remarquer que $\varphi(z_1) \in \{z_2, z'_2\}$).

Partie III - Cas des matrices (3,3)

On note $S'_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $S_3(\mathbb{R})$. Désormais, on ne considérera plus que des éléments de $S'_3(\mathbb{R})$. On dira que A et B sont conjuguées harmoniques si $\operatorname{tr}(A^{-1}B) = \operatorname{tr}(B^{-1}A) = 0$.

On cherche à discuter l'existence, pour $A \in S'_3(\mathbb{R})$ donnée, d'une matrice $B \in S'_3(\mathbb{R})$ telle que A et B soient conjuguées harmoniques.

III.A - On donne pour les questions III.A.1, III.A.2, III.A.3, seulement,

$A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$, avec u, v, w réels non nuls, et on cherche B, telle que A

et B soient conjuguées harmoniques,sous la forme $\begin{pmatrix} au & b & c \\ b & dv & e \\ c & e & fw \end{pmatrix}$.

III.A.1) Écrire $\mathrm{tr}\,(A^{-1}B)$ à l'aide des coefficients de A et B.

Écrire, de même, $\mathrm{tr}\,(B^{-1}A)$ à l'aide des coefficients de A et B.

Montrer alors que $\mathrm{tr}\,(A^{-1}B) = \mathrm{tr}\,(B^{-1}A) = 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a+d = -f \\ ad = \dfrac{b^2}{uv} + \dfrac{c^2}{uw} + \dfrac{e^2}{vw} + f^2 \end{cases} \qquad (3)$$

Les coefficients réels u, v, w, b, c, e, f étant donnés, montrer que l'existence d'une solution de (3) équivaut à

$$\frac{b^2}{uv} + \frac{c^2}{uw} + \frac{e^2}{vw} + \frac{3}{4}f^2 \le 0 .$$

III.A.2) Conclure quant à l'existence de B lorsque les valeurs propres de A sont de même signe.

III.A.3) Lorsque $uv < 0$, montrer qu'on peut choisir B vérifiant les propriétés imposées, avec de plus $c = e = 0$.

On n'oubliera pas de vérifier l'inversibilité de B.

III.A.4) A étant un élément donné de $S'_3(\mathbb{R})$, conclure quant à l'existence de $B \in S'_3(\mathbb{R})$ telle que A et B soient conjuguées harmoniques.

III.B - Exemple : on choisit les matrices A et B sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

où $\alpha > 0$ est un réel donné, les réels β et $\gamma > 0$ étant à déterminer.

III.B.1) Déterminer tous les couples (β, γ) tels que $\mathrm{tr}\,(A^{-1}B) = \mathrm{tr}\,(B^{-1}A) = 0$.

III.B.2) On choisit $(\beta, \gamma) = (\alpha\sqrt{3}, \alpha\sqrt{2})$ et on pose $C = A^{-1}B$.

Montrer qu'il existe U inversible et D diagonale dans $M_3(\mathbb{C})$ telles que $C = UDU^{-1}$.

Peut-on choisir U et D réelles ?

••• FIN •••
