MATHÉMATIQUES I

Pour tout entier naturel non nul n, on notera P_n le polynôme de Taylor d'ordre n de l'exponentielle au point 0 :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

On notera : $[\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \ldots, \lambda_{n,n}]$ un système de racines complexes de P_n. On remarquera qu'en posant

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n,k} = \frac{\lambda_{n,k}}{n},$$

le système $[z_{n,k}]_{1 \le k \le n}$ est un système de racines du polynôme

$$\Pi_n = P_n(nX). \tag{1}$$

Le but de ce problème est d'établir les deux résultats suivants, auxquels on donnera un sens précis et dont la preuve fera l'objet des parties II et III du problème, qu'on peut conjecturer à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

Lorsque $n \to \infty$, les nombres complexes $\xi_{n,k} = z_{n,k} e^{-z_{n,k}}$ tendent à "s'accumuler" sur le cercle de centre 0 et de rayon $1/e$.

Les nombres complexes $\xi_{n,k}$ tendent à se répartir "régulièrement" sur le cercle précédent. Dans la dernière partie on applique ce résultat à l'obtention d'un équivalent du nombre de racines de P_n dont la partie réelle est positive.

Enfin quelques rappels dont la preuve n'est pas demandée.

1- Une suite extraite (ou sous suite) d'une suite (z_n) de nombres complexes est une suite de la forme (z_{p_n}) où (p_n) est une suite strictement croissante d'entiers [*on pourra noter* p_n, $p(n)$ *si l'on préfère*].

2- De toute suite bornée de nombres réels ou complexes on peut extraire une suite convergente.

3- (Convergence dominée pour les séries) Soit $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, une suite double de nombres complexes. On suppose qu'existe une suite (v_k) de réels positifs telle que :

Pour tout couple (n, k), $|u_{n,k}| \le v_k$.

Pour tout entier k, la suite $n \mapsto u_{n,k}$ admet une limite l_k.

La série de terme général v_k converge.

Filière MP

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la série

$\sum_{k \geq 0} u_{n,k}$ converge et la série $\sum_{k \geq 0} l_k$ converge

et l'on a : $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} l_k$

Les trois premières parties sont indépendantes entre elles sauf les questions II.E.3 et III.C.1.

Partie I - Étude d'une courbe plane

I.A - Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$). Déterminer, en fonction de ρ et de θ une forme trigonométrique du nombre complexe $\xi = ze^{-z}$.

I.B - Démontrer que la fonction u, définie sur $]0, 1]$ par :

$$u(t) = \frac{1 + \ln t}{t}$$

est un homéomorphisme croissant de $]0, 1]$ sur $]-\infty, 1]$ dont la fonction réciproque est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

I.C - En déduire l'existence d'une fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel θ, $r(\theta) \in]0, 1]$ et :

$$r(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta} = \frac{1}{e}$$

I.D - Exprimer de manière simple $r(0)$, $r(\pi/2)$. Donner une valeur approchée à 10^{-6} près, en justifiant l'algorithme utilisé, de la constante $r(\pi)$.

I.E - Montrer que r est une fonction continue, 2π-périodique et paire ; démontrer qu'elle est de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$ et que, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 \sin\theta}{r\cos\theta - 1}$$

I.F - Donner un équivalent simple en h de la fonction v définie par $h \mapsto v(h) = 1 - u(1-h)$ lorsque $h \to 0$ par valeurs supérieures (u est défini au I.B). Grâce à une expression de $1 - \cos\theta$ à l'aide de $u(r(\theta))$, en déduire que, lorsque $\theta \to 0$ par valeurs supérieures :

$$r(\theta) = 1 - \theta + o(\theta)$$

Prouver que $\theta \mapsto r(\theta)$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

I.G - Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct ; dessiner sommairement la courbe Γ dont une équation polaire est $\rho = r(\theta)$. Quelle est l'image de Γ par la transformation complexe $z \mapsto ze^{-z}$?

Partie II - Étude des modules des racines

n désigne toujours un entier naturel non nul.

II.A - Prouver que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, les $\lambda_{n,k}$ sont deux à deux distincts. Il en est donc de même des $z_{n,k}$.

II.B - Pour p entier naturel, on pose :

$$q_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \dfrac{n!}{n^p (n-p)!} = \displaystyle\prod_{j=0}^{p-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) & \text{si } 1 \le p \le n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

On considère le polynôme Q_n défini par :

$$Q_n(X) = \frac{n!}{n^n} X^n \Pi_n\left(\frac{1}{X}\right)$$

où Π_n a été défini par la formule (1). Montrer que

$$Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n} q_{n,p} X^p = \sum_{p=0}^{\infty} q_{n,p} X^p$$

Exprimer les racines de Q_n à l'aide des $z_{n,k}$.

II.C -

II.C.1) Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| \le r$:

$$\left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| \le \sum_{p=0}^{\infty} (1 - q_{n,p}) r^p$$

Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{|z|\le r}\left|\frac{1}{1-z}-Q_n(z)\right|$$

II.C.2) En déduire que, pour n assez grand, toute racine z de Q_n satisfait $|z|>r$ puis que pour tout $R>1$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n>N$, on ait :

$$\forall k\in\{1,2,\ \dots,\ n\},\ |z_{n,\,k}|<R$$

II.D - On considère une suite (z_p) de nombres complexes qui converge vers un complexe z tel que $|z|\le 1$.

II.D.1) Déterminer la limite de la suite $(z_p e^{-z_p})$ si $Re(z)=1$.

II.D.2) On suppose $Re(z)\neq 1$, déterminer la limite des suites de terme général :

$$\alpha_p = \int_0^p\left(1-\frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t}dt \text{ et } \beta_p = \left(\frac{p^p}{p!}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

puis la limite de la suite de terme général :

$$\left|\frac{p^p}{p!}\int_0^p\left(1-\frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t}dt\right|^{\frac{1}{p+1}}$$

II.E - Comportement asymptotique des $|\xi_{n,\,k}|$

II.E.1) Soit z une racine complexe du polynôme Π_p. Prouver la relation :

$$^{-z} = (ze^{-z})^{p+1}\frac{p^p}{p!}\int_0^p\left(1-\frac{t}{p}\right)^p e^{zt}dt \qquad (2)$$

(on pourra utiliser une formule de Taylor)

II.E.2) Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels et (z_{p_n}) une suite de complexes telle que, pour chaque entier n, z_{p_n} soit une racine de Π_{p_n}. On suppose de plus que cette suite converge vers un nombre complexe z. Montrer que $|z|\le 1$ et en déduire, à l'aide de la formule (2), que $|ze^{-z}| = \dfrac{1}{e}$.

II.E.3) Démontrer qu'en posant $\xi_{n,\,k} = z_{n,\,k}e^{-z_{n,\,k}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\ \max_{1\le k\le n}\left||\xi_{n,\,k}|-\frac{1}{e}\right| = 0$$

(*on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente*).

Partie III - Répartition des arguments

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, non nul :

$$s_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} z_{n,k}^{p}$$

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}^{p} \text{ (toujours avec } \xi_{n,k} = z_{n,k} e^{-z_{n,k}}\text{)}$$

On note $\rho_{n,k}$ le module de $\xi_{n,k}$ et $\phi_{n,k} \in \mathbb{R}$ l'un quelconque de ses arguments, de sorte que :

$$\xi_{n,k} = \rho_{n,k} e^{i\phi_{n,k}}$$

Enfin on rappelle que le polynôme Q_n et les $q_{n,p}$ ont été définis à la question II.B.

III.A - Démontrer, que la fonction f_n de la variable réelle x :

$$x \mapsto -\frac{Q'_n(x)}{Q_n(x)}$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et que :

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} s_{n,p+1} x^p$$

III.B - Majoration des $S_{n,p}$

III.B.1) Établir, pour $n \geq 1$, et $p \geq 0$, la relation :

$$-(p+1)q_{n,p+1} = \sum_{i=0}^{p} q_{n,i}\, s_{n,p+1-i}$$

III.B.2) Calculer $s_{n,1}$. Prouver, par récurrence sur l'entier p, que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$:

$$|s_{n,p}| \leq 3^p$$

en déduire :

$$|S_{n,p}| \leq 3^p e^{3p}$$

III.C - Équirépartition des $\phi_{n,k}$

III.C.1) Soit $p \in \mathbb{Z}$ non nul. Prouver que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ip\phi_{n,k}} = 0$$

III.C.2) En déduire que, si f est une fonction 2π-périodique, continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, d\phi$$

Partie IV - Étude des racines de partie réelle positive

IV.A - Notons $r_{n,k}$ le module de $z_{n,k}$ et $\theta_{n,k}$ son argument tel que $-\pi \le \theta_{n,k} < \pi$. Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{1 \le k \le n} \left| r_{n,k} - r(\theta_{n,k}) \right| \right)$$

(on pourra raisonner comme à la question II.E.3).

Comment interpréter ce résultat qualitativement ?

IV.B - Déduire de la question III.C.2 et de la précédente que, si f est une fonction 2π-périodique, continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f[\theta_{n,k} - r(\theta_{n,k}) \sin\theta_{n,k}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, d\phi$$

IV.C - On note N_n le nombres de racines de P_n dont la partie réelle est positive. Démontrer que lorsque $n \to \infty$:

$$N_n \sim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e\pi} \right) n$$

••• FIN •••
