MATHÉMATIQUES II

Rappels, notations et objectifs du problème.

Dans tout ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Toutes les matrices considérées ici sont à coefficients réels. On note :

- $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- $\mathscr{S}_n$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. symétriques définies positives c'est-à-dire dont les valeurs propres sont strictement positives).
- $\mathscr{U}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (termes sous-diagonaux nuls) et $\mathscr{U}_n^+$ l'ensemble des matrices appartenant à $\mathscr{U}_n$ dont tous les termes diagonaux sont positifs ou nuls.
- $\mathscr{L}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures dont les termes diagonaux valent 1. Le symbole I_n désigne la matrice unité $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ élément de $\mathscr{M}_n$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n$, le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j est noté $A_{i,j}$.

Dans les parties I et II seulement, si $1 \le i \le n$, A_i désigne la matrice d'ordre i

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,i} \end{bmatrix} \text{ extraite de } A.$$

On confond respectivement :

- matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.
- vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne de ses coordonnées.
- une matrice d'ordre 1 et le réel la constituant.

Si nécessaire, $\mathbb{R}^n$ sera muni de sa structure euclidienne rendant la base canonique orthonormale. Ainsi, si $v \in \mathbb{R}^n$, $v\,{}^tv$ est une matrice de $\mathscr{M}_n$ tandis que ${}^tvv$ représente $\|v\|^2$ (norme euclidienne).

Le but de ce problème est d'étudier trois types de décompositions matricielles : décomposition LU (partie I), décomposition de Cholesky (partie II), décomposition QR (partie III).

Filière PSI

La partie IV utilise des décompositions des parties I à III, pour déterminer des approximations des valeurs propres d'une matrice.

Partie I -

I.A -

I.A.1) Montrer que si A appartient à $\mathscr{M}_n$ est triangulaire inversible, son inverse A^{-1} est aussi triangulaire.

I.A.2) Montrer que $(\mathscr{L}_n, \times)$ est un groupe.

I.B - Soit $A \in \mathscr{M}_n$:

I.B.1) Montrer que si A est inversible, il existe au plus un couple $(L, U) \in \mathscr{L}_n \times \mathscr{U}_n$ tel que $A = LU$.

Si c'est le cas, on dira que A possède une décomposition LU (L comme Lower et U comme Upper).

I.B.2) Montrer que si A est inversible et possède une décomposition LU, alors pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, $\det(A_k) \neq 0$

(on pourra utiliser une décomposition par blocs de A).

I.B.3) On suppose que $\det(A_{n-1}) \neq 0$ et on écrit A par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & A_{n,n} \end{pmatrix} .$$

Montrer qu'il existe H dans $\mathscr{L}_n$ telle que :

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\},) \ (HA)_{n,i} = 0 \quad .$$

En posant *a priori* $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix}$ expliciter une telle matrice H ainsi que son inverse, c'est-à-dire expliciter les blocs H_{n-1} et H', ainsi que les blocs correspondants de H^{-1} en fonction des blocs de la matrice A.

I.B.4) Montrer que si pour tout k dans $\{1, \ldots, n\}$, $\det(A_k) \neq 0$ alors A a une décomposition LU

(on pourra opérer par récurrence en utilisant une décomposition par blocs de A).

I.C -

I.C.1) Soit deux entiers p et q tel que $1 \le p < q \le n$. Montrer que l'opération élémentaire consistant à échanger les lignes p et q d'une matrice de $\mathcal{M}_n$ correspond à la multiplication à gauche par une matrice de $\mathcal{M}_n$ à déterminer.

I.C.2) Pour $1 \le k \le n$ et $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$, le symbole

$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix}_A$ désigne le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{i_1, j_1} & A_{i_1, j_2} & \ldots & A_{i_1, j_k} \\ A_{i_2, j_1} & A_{i_2, j_2} & \ldots & A_{i_2, j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_k, j_1} & A_{i_k, j_2} & \ldots & A_{i_k, j_k} \end{pmatrix}$$

extraite de A. Ainsi par exemple, $\det(A_i) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & i \\ 1 & 2 & \ldots & i \end{bmatrix}_A$.

Sous les hypothèses de la question I.B.4, et notant $A = LU$ la décomposition LU de A, trouver dans l'ordre :

a) la première ligne de U,

b) la première colonne de L,

c) les éléments diagonaux de U,

d) les éléments de L des colonnes $2, 3, \ldots, n$
(on utilisera I.C.1) sous forme $PA = PLU$ où P est une matrice telle que la multiplication de M par P à gauche permute deux lignes de M),

e) les éléments de U des lignes $2, 3, \ldots, n$.

On montrera que pour $2 \le j \le i \le n$, $L_{i,j} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & j \\ 1 & 2 & \ldots & j \end{bmatrix}_A}$ et on donnera

pour $U_{i,j}$ ($2 \le i \le j \le n$) une formule analogue.

I.D - Écriture de l'algorithme

En utilisant :

- un algorithme induit par la question I.C.2),
- un langage de programmation (qu'on précisera) comprenant la fonction déterminant (notée det),

écrire une procédure donnant, pour une matrice A satisfaisant aux conditions du I.B.4), les matrices L et U telles que $A = LU$.

I.E - Exemples :

I.E.1)

a) À l'aide de l'algorithme mis en place au I.D - , effectuer la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

en indiquant les différentes étapes et les calculs intermédiaires.

b) En déduire la résolution du système matriciel $AX = Y$ d'inconnue

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et de paramètre } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ t \end{pmatrix}.$$

I.E.2) Donner deux exemples de matrices de $\mathcal{M}_2$, l'une ne possédant pas de décomposition LU, l'autre en possédant plusieurs.

I.E.3) Dans cette question C_p^q désigne le coefficient du binôme de Newton avec la convention $C_p^q = 0$ si $p < q$, si $p < 0$ ou si $q < 0$.

a) Soient p, q et r entiers naturels. Montrer la formule de Vandermonde :

$$C_{p+q}^r = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_p^k C_q^{r-k}$$

(on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

b) Soit $p \in \mathbb{N}$; déterminer la décomposition LU de la matrice A de $\mathcal{M}_n$ telle que $A_{i,j} = C_{p+j-1}^{i-1}$. En déduire $\det A$.

Écrire A, L, U lorsque $p = 1$ et $n = 4$.

Partie II -

II.A - Soit $A \in \mathcal{S}_n$. Montrer que A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si pour tout v appartenant à $\mathbb{R}^n$ non nul, ${}^t vAv > 0$.

On suppose dans le reste de cette partie II - , que $A \in \mathcal{S}_n^{++}$.

II.A.1) Montrer que A possède une décomposition LU unique notée :

$A = LU$ où $L \in \mathcal{L}_n$ et $U \in \mathcal{U}_n$. (on pourra utiliser I.B).

II.A.2) Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_{i,\,i} > 0$.

II.B -

II.B.1) Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{U}_n$ telle que $A = {}^t BB$ (on pourra modifier L et U et se ramener au cas de matrices triangulaires inférieure et supérieure à diagonales identiques).

II.B.2) Montrer que la décomposition obtenue à la question précédente est unique si on impose $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_{i,\,i} > 0$.

II.C - Si $M \in \mathcal{M}_n$, montrer que les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

i) $M \in \mathcal{S}_n^{++}$,

ii) $\exists B \in \mathcal{U}_n$ inversible telle que $M = {}^t BB$,

iii) $M \in \mathcal{S}_n$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(M_k) > 0$.

Partie III -

III.A - Soit $v \in \mathbb{R}^n$ unitaire ($\|v\| = 1$). On pose $H^{(v)} = I_n - 2v\,{}^t v$ (matrice de Householder) et par convention $H^{(0)} = I_n$.

III.A.1) Montrer que $H^{(v)}$ est une symétrie orthogonale que l'on caractérisera.

III.A.2) Montrer que pour tout a dans $\mathbb{R}^n$, il existe v dans $\mathbb{R}^n$ tel que $H^{(v)}a$ soit de la forme $(*, 0, 0, \ldots, 0)$.

III.B - Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

III.B.1) Montrer qu'il existe $H_1, \ldots, H_{n-1}$ matrices de Householder telles que :

$H_{n-1}H_{n-2}\ldots H_1 A \in \mathcal{U}_n$.

III.B.2) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n$ s'écrit sous la forme $A = QR$ où $Q \in \mathcal{M}_n$ est orthogonale et $R \in \mathcal{U}_n^+$ (on parle de décomposition QR).

III.B.3) Montrer que si A est inversible, il y a unicité de la décomposition.

III.C - Quel résultat de cours permet d'obtenir directement une décomposition du type QR lorsque A est supposée inversible ?

Partie IV -

Dans cette partie A est une matrice de $\mathcal{M}_n$ inversible et possédant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots \lambda_n$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$.

IV.A - Dans cette section, on montre des résultats préliminaires.

IV.A.1) On rappelle qu'une suite de matrice $(M_k)_{k \in \mathrm{IN}}$ converge vers une matrice M si et seulement si chaque coefficient de M_k converge vers le coefficient de M correspondant.

Montrer que si $(M_k)_{k \in \mathrm{IN}}$ et $(N_k)_{k \in \mathrm{IN}}$ sont deux suites de $\mathcal{M}_n$ convergentes de limites respectives M et N alors la suite $(M_k N_k)_{k \in \mathrm{IN}}$ converge vers MN.

IV.A.2) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n$, on définit

$$|||M||| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|MX\|,$$

et on admet que $M \mapsto |||M|||$ définit une norme dans $\mathcal{M}_n$.

a) Montrer que si M et N sont dans $\mathcal{M}_n$, on a

$$|||MN||| \leq |||M||| \cdot |||N|||.$$

b) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n$ vérifie $|||M||| < 1$ alors $M + I_n$ est inversible.

IV.A.3) Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On suppose dans la suite de cette partie que P^{-1} possède une décomposition LU sous la forme $P^{-1} = LU$ et on pose $P = QR$ la décomposition QR de P.

IV.B - Soit $(A_k)_{k \geq 1}$ la suite d'éléments de $\mathcal{M}_n$ définie par récurrence de la façon suivante :

- $A_1 = A$;
- si A_k a été construite, on pose $A_k = Q_k R_k$ la décomposition QR de A_k ;
- on définit $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Montrer que les matrices A_k $(k \geq 1)$ sont semblables à A.

IV.C - Déterminer explicitement la matrice $D^k L D^{-k}$ et $\lim_{k \to +\infty} D^k L D^{-k}$ (la matrice D est celle définie au IV.A.3)).

On posera dans la suite $E_k = D^k L D^{-k} - I_n$.

IV.D - Montrer qu'à partir d'un certain rang $I_n + R E_k R^{-1}$ admet une décomposition QR unique de la forme :

$$I_n + R E_k R^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$$

où $\tilde{R}_k$ est à termes diagonaux strictement positifs.

On admet dans toute la suite que la suite $(\tilde{Q}_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathscr{M}_n$.

IV.E - .

IV.E.1) Montrer que la limite $\tilde{Q}$ de la suite $(\tilde{Q}_k)_{k \geq 1}$ est orthogonale.

IV.E.2) Montrer que la suite $(\tilde{R}_k)_{k \geq 1}$ converge et que sa limite $\tilde{R}$ est dans $\mathscr{U}_n^+$.

IV.E.3) Déterminer $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$.

IV.F - En utilisant deux compositions QR de A^k, montrer que la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ est telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,\,i} = \lambda_i (1 \leq i \leq n) \qquad \lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,\,j} = 0 (1 \leq j < i \leq n)$$

• • • FIN • • •