MATHÉMATIQUES I

Les parties II, III et IV sont relativement indépendantes.

Partie I - Définition d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n points tous distincts dans un plan. Ces points sont, dans cet ordre, les sommets d'un polygone convexe. Autrement dit, en convenant que $A_{n+1} = A_1$ la propriété suivante est vérifiée : pour tout côté $A_i A_{i+1}$ du polygone, tous les sommets du polygone autres que A_i et A_{i+1} sont du même côté de la droite joignant A_i à A_{i+1}.

On appelle diagonale du polygone tout segment joignant deux sommets non consécutifs. On trace un certain nombre de ces diagonales de manière à découper le polygone en triangles. Les diagonales utilisées ne doivent avoir, deux par deux, aucun point commun à l'intérieur du polygone.

Pour n fixé, on note a_n le nombre de découpages possibles du polygone.

Pour $n = 4$, par exemple, il y a deux découpages possibles, l'un utilisant la diagonale $A_1 A_3$ et l'autre utilisant la diagonale $A_2 A_4$, donc $a_4 = 2$.

I.A - Ici, $n = 5$. Montrer que le triangle $A_1 A_2 A_3$ figure dans 2 découpages possibles, le triangle $A_1 A_2 A_4$ dans un seul découpage et le triangle $A_1 A_2 A_5$ dans 2 découpages possibles.

En déduire que $a_5 = 5$.

I.B - Ici, $n = 6$. Combien y-a-t-il de découpages possibles du polygone dans lesquels figurent le triangle $A_1 A_2 A_3$? le triangle $A_1 A_2 A_4$? le triangle $A_1 A_2 A_5$? le triangle $A_1 A_2 A_6$?

Calculer a_6.

I.C - Justifier que

$$a_7 = a_6 + a_5 + a_4^2 + a_5 + a_6 \text{ et que } a_8 = a_7 + a_6 + a_5 a_4 + a_4 a_5 + a_6 + a_7 .$$

I.D - Donner en la justifiant, une formule généralisant les précédentes et permettant, pour $n \geq 7$, de calculer a_n connaissant $a_4, \ldots, a_{n-1}$.

Filière TSI

I.E - On convient que $a_2 = a_3 = 1$. Montrer que l'on a, pour tout n supérieur ou égal à 3,

$$a_n = \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k}.$$

I.F - Écrire une procédure ou une fonction qui, recevant à l'entrée la valeur de n, renvoie un tableau contenant les valeurs $a_2, \ldots, a_n$. Ce programme sera écrit dans le langage du logiciel de calcul formel connu du candidat, qui sera précisé sur la copie. Il devra être accompagné de commentaires le rendant compréhensible par le correcteur.

Partie II - Expression de a_n

On se propose, dans cette partie, d'expliciter l'entier a_n défini dans la première partie. On convient que $a_0 = a_1 = 0$.

II.A - Montrer que l'on a, pour tout n supérieur ou égal à 3,

$$a_n = \sum_{k=2}^{n+1} a_k a_{n+1-k}.$$

II.B - Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tels que la série entière $\sum b_n x^n$ ait un rayon de convergence r non nul. Pour $x \in \left]-r, r\right[$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

II.B.1) Soit m fixé dans $\mathbb{N}$. Montrer que, sur $\left]-r, r\right[$, la fonction h définie par $h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{m+k} x^k$ est définie et continue.

II.B.2) En déduire que g admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre m. Préciser la partie polynomiale de ce développement limité.

II.B.3) Si p est un entier inférieur ou égal à m, quel est le coefficient de x^p dans le développement limité d'ordre m, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto g^2(x)$? ($g^2(x)$ désigne le produit du réel $g(x)$ par lui-même).

Quel est le coefficient de x^p dans le développement limité d'ordre m de la fonction $x \mapsto g^2(x) - xg(x) + x^3$?

II.C - On revient à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et on utilise la fonction f définie sur $] R, + R [$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

II.C.1) Que peut-on dire, si R n'est pas nul, de l'existence et de la valeur de $f'(0)$?

II.C.2) Dire pourquoi les résultats de II.B suggèrent qu'on a peut-être, si R n'est pas nul :

$$\forall x \in]-R, +R[, \quad f^2(x) - xf(x) + x^3 = 0 .$$

II.C.3) Trouver un réel β, le plus grand possible, et une fonction h (que l'on explicitera en résolvant une équation du second degré) définie et continue sur $]-\infty, \beta[$, dérivable en 0 avec $h'(0) = 0$, tels que :

$$\forall x \in]-\beta, +\beta[, \quad h^2(x) - xh(x) + x^3 = 0 .$$

II.D -

II.D.1) Le réel α étant fixé, rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ et son rayon de convergence.

II.D.2) En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$. On essaiera d'écrire le coefficient de x^n dans ce développement sous la forme d'une fraction dont les deux termes seraient des produits d'entiers.

II.D.3) Donner de $h(x)$ une expression, valable pour $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, sous forme de série entière.

II.D.4) En utilisant II.C.3 et II.B.3, montrer que, pour tout entier naturel n, le coefficient de x^n dans le développement de $h(x)$ en série entière est exactement égal à a_n.

II.E - Déduire de tout ce qui précède une expression simple de a_n, valable pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et utilisant le coefficient binomial C_{2n-4}^{n-2}.

On rappelle que, avec la convention $0! = 1$, on a $C_p^q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$.

II.F - En déduire que, pour n supérieur ou égal à 2, l'entier C_{2n-4}^{n-2} est divisible par l'entier $n-1$.

Partie III - Équivalent de a_n

On se propose dans cette partie de déterminer un équivalent de l'entier a_n défini dans la première partie. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}}\, dt .$$

III.A - Établir l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_0 et I_1.

III.B -

III.B.1) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

III.B.2) Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

III.B.3) En déduire que I_{n+1} est équivalent à I_n lorsque $n \to \infty$.

III.C - Montrer, en utilisant III.B.2, que $(n+1)I_n I_{n+1}$ est une constante que l'on explicitera.

En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to \infty$.

III.D - Pour $n \geq 2$, calculer I_{2n-4} puis exprimer a_n au moyen de I_{2n-4}.

En déduire un équivalent de a_n lorsque $n \to \infty$.

Partie IV - Étude d'une fonction

On se propose dans cette partie d'étudier la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} x^n .$$

IV.A - Montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \qquad \varphi(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right).$$

Étudier les variations et tracer le graphe de la restriction de φ à $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.

IV.B - Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$.

IV.B.1) Soit $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$. Montrer que

$$\sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2}\, x^n \leq \frac{x}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right).$$

IV.B.2) En déduire que

$$\sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{8}.$$

IV.B.3) φ est-elle définie pour $x = \frac{1}{4}$? est-elle définie pour $x = -\frac{1}{4}$?

IV.C - Conclure quant à l'ensemble de définition de φ. La fonction φ est-elle continue sur cet ensemble ? Donner de $\varphi(x)$ une expression simple valable pour tout x appartenant à l'ensemble de définition.

IV.D -

IV.D.1) Citer les théorèmes qui permettent de justifier la dérivabilité de la série entière définissant φ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, d'écrire $\varphi'(x)$ comme somme d'une série entière que l'on explicitera, et de donner le rayon de convergence de cette série.

IV.D.2) Montrer que φ est solution, sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, de l'équation différentielle (E) linéaire du premier ordre

$$x(1-4x)y'(x) - (1-6x)y(x) = p(x) \qquad (E)$$

où p est un polynôme du second degré que l'on déterminera.

IV.D.3) Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

IV.D.4) Résoudre (E) sur chacun des intervalles

$$]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad]0, \frac{1}{4}[.$$

IV.D.5) Vérifier que φ est la seule solution de (E), de classe C^1 sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, avec une dérivée nulle en 0.

IV.E -

IV.E.1) La fonction φ' est-elle bornée sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$?

IV.E.2) La série entière égale à $\varphi'(x)$ pour

$x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ est-elle convergente pour $x = \frac{1}{4}$?

IV.E.3) On note

$x_n = \frac{n}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. Vérifier que l'on a

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{1}{2n} \text{ pour tout } n \geq 2.$$

En déduire la nature de la série de terme général $\ln(x_n) - \ln(x_{n+1})$ et la nature de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

IV.E.4) La série entière égale à $\varphi'(x)$ pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ est-elle convergente pour $x = -\frac{1}{4}$?

φ est-elle dérivable en ce point ?

••• FIN •••
