MATHÉMATIQUES II

Le conditionnement d'une matrice est un réel qui mesure les erreurs d'approximation commises lors de la résolution d'un système linéaire dont les données ne sont pas connues avec précision. Plus ce réel est grand, moins le résultat est fiable. L'objectif de ce problème est de montrer que certaines matrices (appelées matrices de Hankel) ont un conditionnement qui croît exponentiellement avec leur taille.

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2. $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n et I_n l'élément unité de $GL_n(\mathbb{R})$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique que l'on notera $<.,.>$. L'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à n lignes et une colonne sera identifié à $\mathbb{R}^n$.
- La norme associée sera notée $\|.\|$, de sorte que pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$.
- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $(e_1, \dots, e_n)$.
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on notera $a_{i,j}$ ses coefficients.
- Si $c_1, \dots, c_n$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on notera $[c_1, \dots, c_n]$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne est le vecteur c_i, pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Si A est une matrice, on notera A^* sa transposée.

Question préliminaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

- On dit que A est positive si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^*AX \geq 0$.
- On dit que A est définie positive si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$, $X^*AX > 0$.

Montrer qu'une matrice symétrique positive (resp. définie positive) a ses valeurs propres positives (resp. strictement positives).

Filière TSI

Partie I - Norme N sur $M_n(\mathbb{R})$

I.A - Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut définir le réel $N(A)$ par $N(A) = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ et que l'on a alors $N(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

I.B - Montrer que N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et que l'on a

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ N(AB) \le N(A)N(B)$$

I.C - Soit $c_1, \ldots, c_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$N([c_1, \ldots, c_n]) \ge \max_{i=1\ldots n} \|c_i\|$$

I.D - Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$N([0, \ldots, 0, v]) = \|v\|$$

I.E - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A^*A est symétrique positive et en déduire que

$$N(A) = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

où $\rho(A^*A)$ désigne la plus grande valeur propre de A^*A.

I.F - En déduire que : $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $N(A^*A) = N(A)^2$.

Partie II - Conditionnement

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on appelle conditionnement de A le réel $\mathrm{cond}(A) = N(A)N(A^{-1})$.

II.A - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) < 1$. On pose $S_m = \sum_{k=0}^{m} A^k$. Montrer que la suite (S_m) converge et en déduire que $I_n - A$ est inversible.

II.B - Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R}) \backslash GL_n(\mathbb{R})$. En remarquant que $B = A(I_n - A^{-1}(A-B))$ montrer que $\mathrm{cond}\,(A) \ge \frac{N(A)}{N(A-B)}$.

II.C - Soit $A = [c_1, \dots, c_n] \in GL_n(\mathbb{R})$ et $v = c_n - p(c_n)$ où $p \in L(\mathbb{R}^n)$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(c_1, \dots, c_{n-1})$. On pose $M = [0, \dots, 0, v]$. Montrer que $A - M$ n'est pas inversible et en déduire que

$$\mathrm{cond}(A) \geq \frac{\|c_1\|}{\|v\|}$$

Partie III - Matrices de type VDM

On appelle **matrice de type VDM** une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 x_1 & \dots & \dots & q_1 x_1^{n-1} \\ q_2 & q_2 x_2 & \dots & \dots & q_2 x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_n & q_n x_n & \dots & \dots & q_n x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$ où $(x_1, \dots, x_n)$ et $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a donc $a_{i,j} = q_i x_i^{j-1}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

On **suppose** dans cette partie que A est inversible et que

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $|x_i| \leq 1$. On note

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$, de sorte que

$A = [q, Xq, X^2 q, \dots, X^{n-1} q]$. On note enfin

$v = X^{n-1} q - p(X^{n-1} q)$ où p est le projecteur orthogonal sur

$H = \mathrm{Vect}(q, Xq, \dots, X^{n-2} q)$

III.A - Montrer que

$$\forall u \in H, \|v\| \leq \|X^{n-1} q - u\|$$

et en déduire que pour tout polynôme P de degré $n - 1$, unitaire, à coefficients réels

$$\|v\| \leq \|P(X) q\|$$

III.B - Montrer que pour tout polynôme P de degré $n-1$, unitaire, à coefficients réels

$$\mathrm{cond}(A) \geq \frac{1}{\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|}$$

III.C - On définit la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par

$$\begin{cases} T_0(X) = 1 \\ T_1(X) = X \\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

et en déduire que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| \leq 1$$

III.D - Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.E - En déduire que

$$\mathrm{cond}(A) \geq 2^{n-2}$$

On **admet** que lorsque les x_i sont quelconques, on a

$$\mathrm{cond}(A) \geq \frac{\sqrt{3}}{8} 2^{\frac{n}{2}}$$

Partie IV - Matrices de Hankel

IV.A - Soit $B \in GL_n(\mathbb{R})$. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt aux colonnes de B, montrer qu'il existe une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure telles que $B = QR$.

IV.B - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = B^*B$$

et en déduire qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure inversible telle que $A = R^*R$.

On appelle **matrice de Hankel** une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots\ \dots & \alpha_{n+1} \\ \alpha_3 & \dots & \dots\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots\ \dots & \dots \\ \alpha_n & a_{n+1} & \dots\ \dots & \alpha_{2n-1} \end{pmatrix} \text{où } \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1} \text{ sont des réels.}$$

On a donc

$$a_{i,j} = \alpha_{i+j-1} \text{ pour tout } (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 .$$

A est symétrique et **on suppose** qu'elle est définie positive. On considère donc $R \in GL_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $A = R^*R$.

IV.C - On note $r_{1,1}^{-1}R = [c_1, \dots, c_n]$. Exprimer $< c_i, c_j >$ à l'aide des coefficients de A et de $r_{1,1}$ et en déduire que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n-1\}^2,\ < c_{i+1}, c_j > \ = \ < c_i, c_{j+1} >$$

IV.D - Montrer que

$$\mathrm{Vect}(c_1, \dots, c_{n-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

IV.E - Montrer qu'il existe $T \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} T(c_k) = c_{k+1} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n-1\} \\ T(e_n) = T^*(e_n) \end{cases}$$

IV.F - Montrer que $r_{1,1}^{-1}R = [e_1, Te_1, T^2e_1, \dots, T^{n-1}e_1]$ et en déduire que

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n-2\}^2,\ < T(T^ie_1), T^je_1 > \ = \ < T^*(T^ie_1), T^je_1 >$$

IV.G - Montrer que pour tout x et y de Vect $(e_1, Te_1, \dots, T^{n-2}e_1, e_n)$ on a

$$< Tx, y > \ = \ < T^*x, y >$$

IV.H - En déduire que T est symétrique.

IV.I - En diagonalisant T, montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice B de type VDM telles que $R = Q^*B$.

IV.J - En déduire que le conditionnement d'une matrice de Hankel A définie positive vérifie cond $(A) \geq 3 \cdot 2^{n-6}$.

IV.K - Un exemple : en considérant sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$) le produit scalaire

$$(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt,$$

montrer que la matrice

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

est une matrice de Hankel définie positive.

••• FIN •••