MATHÉMATIQUES II

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et orienté de sorte que la base canonique, notée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, soit orthonormale directe.

On a donc pour tout x, y et z réels : $(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Le produit scalaire sera noté : $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur non nul élément de E, on note $D_{\boldsymbol{u}}$, la droite vectorielle de base $\boldsymbol{u}$, $P_{\boldsymbol{u}}$ le plan vectoriel orthogonal à $D_{\boldsymbol{u}}$ et $S_{\boldsymbol{u}}$ le demi-tour par rapport à $D_{\boldsymbol{u}}$ c'est-à-dire la symétrie orthogonale par rapport à $D_{\boldsymbol{u}}$ ou encore la rotation vectorielle d'axe $D_{\boldsymbol{u}}$ et d'angle de mesure π.

Si θ est un nombre réel, on note R_θ la rotation vectorielle d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ orienté dans le sens du vecteur $\boldsymbol{k}$ et d'angle de mesure θ.

On rappelle qu'une rotation vectorielle de E ayant -1 comme valeur propre est un demi-tour.

On rappelle également l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in E^2,\ \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle^2 \leq \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2$$

et l'on admet que dans cette inégalité, l'égalité a lieu si et seulement si les deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires.

Partie I - Étude d'un cas particulier

Pour tout (x, y, z) élément de E, on pose : $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et l'on note Q_0 l'ensemble suivant : $Q_0 = \{(x, y, z) \in E \mid q(x, y, z) = 0\}$.

I.A - Une étude de Q_0

I.A.1) Déterminer quelques éléments de symétrie de Q_0

I.A.2) Déterminer et dessiner l'intersection de Q_0 avec le plan $P_{\boldsymbol{j}}$.

I.A.3)

a) Démontrer que pour tout θ réel : $R_\theta(Q_0) \subset Q_0$.

b) En déduire que, pour tout θ réel, Q_0 est invariant par R_θ c'est-à-dire : $R_\theta(Q_0) = Q_0$.

I.A.4) Donner la nature géométrique de Q_0.

Filière MP

I.B - Automorphismes orthogonaux laissant $D_{\boldsymbol{u}}$ invariant

On note K l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant $D_{\boldsymbol{k}}$, c'est-à-dire : $K = \{\varphi \in O(E) |\ \varphi(D_{\boldsymbol{k}}) = D_{\boldsymbol{k}}\}$

I.B.1) Donner quelques éléments de K.

I.B.2) Soit φ un élément quelconque de K.

a) Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de φ.

b) Démontrer : $\varphi(\boldsymbol{k}) \in \{-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\}$.

c) Déterminer l'ensemble K^+ des rotations vectorielles éléments de K.

I.B.3) On pose $K^- = \{-r | r \in K^+\}$. Démontrer que $K = K^+ \bigcup K^-$.

I.C - Automorphismes orthogonaux laissant Q_0 invariant

On note K_0 l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant Q_0, c'est-à-dire : $K_0 = \{\varphi \in O(E) |\ \varphi(Q_0) = Q_0\}$.

I.C.1) Démontrer que K_0 est un sous-groupe de $O(E)$.

I.C.2)

a) Reconnaître, pour tout θ réel, l'endomorphisme $R_\theta \circ S_{\boldsymbol{i}}$.

b) Démontrer : $K^+ \subset K_0$.

c) Démontrer : $K \subset K_0$.

I.C.3) Soit φ un élément quelconque de K_0.

a) Démontrer que pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ élément de Q_0 tel que : $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$, l'on a :

$$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{k} \rangle^2 = 1 .$$

b) On note $\boldsymbol{u}$ un vecteur quelconque unitaire élément de $P_{\boldsymbol{k}}$.

i) Observer que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k} \in Q_0$, puis démontrer : $\langle \varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle^2 = 1$.

ii) En faisant intervenir le vecteur $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{k}$, en déduire : $\langle \varphi(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{k} \rangle \ \langle \varphi(\boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle = 0$

iii) On suppose $\langle \varphi(\boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle = 0$; démontrer qu'alors $\varphi(\boldsymbol{u})$ est colinéaire à $\boldsymbol{k}$. Est-ce cohérent ?

iv) En déduire : $\varphi(P_{\boldsymbol{k}}) = P_{\boldsymbol{k}}$.

I.C.4) Démontrer que $K_0 = K$.

I.D - Composition et invariance

On pose : $C = \{\varphi \in O(E) | \; q \circ \varphi = q\}$.

I.D.1) Démontrer $C = K$.

I.D.2)

a) Justifier que q est une forme quadratique sur E et donner sa matrice M dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

b) Reconnaître l'endomorphisme σ de matrice M dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

I.D.3) Démontrer que tout élément φ de C commute avec σ c'est-à-dire vérifie $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$.

I.D.4) Soit φ un élément de $O(E)$ qui commute avec σ. Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de φ.

I.D.5) En déduire $C = \{\varphi \in O(E) | \; \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma\}$.

Partie II - Une généralisation

On note U un endomorphisme symétrique de E et l'on pose pour tout vecteur $\boldsymbol{X}$ de E : $f(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{X} | U(\boldsymbol{X}) \rangle$. Pour tout a réel, on pose ; $F_a = \{\boldsymbol{X} \in E \mid f(\boldsymbol{X}) = a\}$. On veut déterminer les endomorphismes U tels que toutes les surfaces F_a soient de révolution d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ c'est-à-dire tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_a) = F_a \quad (*).$$

II.A - Démontrer que $(*)$ est équivalente à $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta = f$.

II.B - On suppose ici : $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$. Démontrer qu'alors $(*)$ est vérifiée.

II.C - On suppose maintenant que $(*)$ est vérifiée et l'on veut démontrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$.

II.C.1) Déterminer les endomorphismes symétriques V de E tels que :

$$\forall \boldsymbol{X} \in E, \langle \boldsymbol{X} | V(\boldsymbol{X}) \rangle = 0.$$

II.C.2) Démontrer que si V et V' sont des endomorphismes symétriques de E, il en est de même de $V - V'$.

II.C.3) Démontrer que pour tout réel θ l'endomorphisme $R_\theta^{-1} \circ U \circ R_\theta$ est symétrique.

II.C.4) Conclure.

II.D - On suppose que U commute avec toutes les rotations R_θ.

II.D.1) Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de U. En déduire : $U(P_{\boldsymbol{k}}) \subset P_{\boldsymbol{k}}$.

II.D.2) Démontrer que la matrice M de U dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ est du type :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

II.D.3) En déduire que $(*)$ est vérifiée si et seulement si M s'écrit :

$M = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Que vaut alors $f(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) élément de E ?

II.E - Un résultat plus fort

On suppose dans cette section que F_1 est non vide et de révolution d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ c'est-à-dire que U est tel que :

$$\begin{cases} F_1 \neq \varnothing \\ \forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_1) = F_1 \end{cases} \qquad (1)$$

et on désigne par $\boldsymbol{X}$ un vecteur quelconque de E.

II.E.1) On suppose $f(\boldsymbol{X}) > 0$; démontrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta(\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X})$.

II.E.2) On suppose $f(\boldsymbol{X}) \leq 0$. On considère alors un vecteur $\boldsymbol{X}_1$ élément de F_1 et pour tout réel t, on pose $g(t) = f(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1)$.

a) Démontrer que g est une fonction polynômiale de degré 2 que l'on précisera. En déduire qu'il existe un réel t_0 tel que :

$$\forall t \in [t_0; +\infty[, g(t) > 0.$$

b) Démontrer pour tout réel θ :

$$\forall t \in [t_0; +\infty[, f(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1) = f \circ R_\theta(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1).$$

En déduire que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\boldsymbol{X}) = f \circ R_\theta(\boldsymbol{X}).$$

II.E.3) En déduire quels sont les endomorphismes symétriques U satisfaisant aux conditions (1) et reconnaître toutes les surfaces F_1 associées.

••• FIN •••
