PHYSIQUE II

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Partie I - Bilans énergétiques

Ce premier problème fait l'étude de bilans énergétiques de composants électriques tels un conducteur ohmique de résistance R ou un condensateur parfait de capacité C. La section I.A est indépendante des sections I.B et I.C. Les sections I.B et I.C sont dans une très large mesure indépendantes.

I.A - Bilan énergétique d'un conducteur ohmique

Le conducteur ohmique étudié est assimilable à un corps cylindrique homogène ayant les caractéristiques suivantes :

- section $s = \pi r^2 = 0,5\ \mathrm{mm}^2$ et longueur $l = 50\ \mathrm{cm}$ constantes,
- résistivité électrique

  $\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$ où T est la température du conducteur ohmique

  $\rho_0 = \rho(T_0) = 1,2 \cdot 10^{-7}\Omega \cdot \mathrm{m}$, $T_0 = 300\ \mathrm{K}$ et $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ U.S.I. un coefficient caractéristique,
- capacité thermique supposée constante $K = 0,5\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}$,
- énergie interne $U \approx KT$.

On modélise le fonctionnement du conducteur ohmique, encore appelé résistance dans la suite de ce problème, par les hypothèses suivantes :

- la résistance est parcourue par un courant **d'intensité constante** I_0,
- à chaque instant t, la température $T(t)$ est uniforme dans la résistance,
- la résistance est placée dans un milieu gazeux de **température supposée constante** égale à T_0 et de **pression constante**,
- la résistance est en contact thermique avec l'extérieur par sa surface latérale $S = 2\pi rl$. À travers cette surface la résistance échange avec son environnement gazeux une puissance thermique $P = -hS(T(t) - T_0)$, $h = 45\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$.

I.A.1)

a) Donner l'unité du paramètre α. À quelle condition la formule $R = \rho(l/s)$ donne -t-elle la résistance d'un conducteur ohmique ?

Filière TSI

Calculer numériquement la résistance R pour $T = T_0$.

b) Déterminer l'expression du transfert thermique δQ réalisé entre la résistance et son environnement gazeux entre les instants t et $t + dt$. En supposant par exemple $T > T_0$, justifier le signe négatif figurant dans l'expression de la puissance thermique.

c) Déterminer l'expression du travail électrique δW_e échangé par la résistance avec le reste du circuit électrique entre les instants t et $t + dt$. Que peut-on dire du travail des forces de pression δW_m échangé par la résistance avec son environnement gazeux entre les instants t et $t + dt$?

d) Énoncer littéralement le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé **quelconque**. Préciser la signification des termes « fonction d'état » et « extensif ».

I.A.2)

a) Déduire des questions précédentes une équation vérifiée par la variable $X = T - T_0$. On écrira l'équation sous la forme $X'(t) + X/\tau = X_\infty/\tau$ en précisant l'expression des paramètres τ et X_∞ en fonction de ρ_0, α, l, s, S, I_0, h et K. Indiquer et interpréter la condition sur l'intensité I_0 pour que $\tau > 0$.

b) Donner la signification physique des paramètres τ et $T_\infty = X_\infty + T_0$. Calculer numériquement τ et T_∞ pour $I_0 = 1\ \mathrm{A}$.

c) On désire que la température de la résistance ne dépasse pas T_{lim}. Quelle est la densité maximale de courant j_{max} qu'on ne doit pas dépasser ? Calculer numériquement j_{max} pour $T_{lim} = 310\ \mathrm{K}$.

I.B - Un bilan énergétique pour un circuit série RC

Un circuit série RC est alimenté par un générateur idéal de tension dont la force électromotrice $e(t)$ est constante : $e(t) = U_0$. À un instant pris pour origine des temps on ferme le circuit, le condensateur étant déchargé. On note $i(t)$ l'intensité du courant et $q(t)$ la charge électrique portée par l'une des armatures du condensateur.

I.B.1)

a) Réaliser un schéma du circuit en adoptant une orientation pour l'intensité qui satisfasse la relation $i = dq/dt$. On fera figurer sur le schéma l'orientation proposée du courant ainsi que la position de l'armature portant la charge $q(t)$.

b) Établir une équation vérifiée par l'intensité du courant où figure une expression intégrale de l'intensité. Quel est le temps théorique de charge du condensateur ? Indiquer pourquoi en pratique la charge dure un temps fini t_c. Évaluer littéralement le temps t_c de la charge du condensateur.

I.B.2)

a) En partant de l'équation établie à la question précédente, réaliser un bilan énergétique du circuit entre les instants t et $t + dt$. Préciser la signification de chaque terme intervenant dans ce bilan.

b) Déterminer l'énergie théorique échangée par le condensateur lors de sa charge en fonction des paramètres Q et C, Q désignant la charge finale du condensateur. Où est localisée cette énergie ? Pourquoi peut-on qualifier cette énergie d'énergie potentielle ?

I.C - Un bilan énergétique pour le condensateur

Le circuit série RC est alimenté par un générateur idéal de tension dont la force électromotrice $e(t)$ est maintenant une fonction croissante quelconque du temps. Le condensateur initialement déchargé acquiert une charge finale Q.

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques r, θ, z. On exprimera les grandeurs physiques vectorielles sur la base cylindrique directe $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ avec $\vec{e}_z = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$. L'intérieur du condensateur $(0 \le r \le a, 0 \le z \le e, 0 \le \theta < 2\pi)$ est rempli d'un diélectrique parfait dont la permittivité diélectrique relative vérifie $\varepsilon_r \approx 1$.

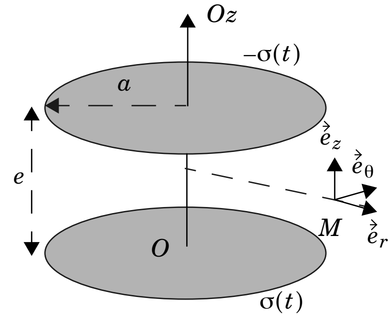

Figure 1 : schéma du condensateur

L'armature inférieure porte une densité surfacique de charge uniforme $\sigma(t) > 0$, l'armature supérieure une densité surfacique de charge uniforme $-\sigma(t)$. On suppose que le régime de fonctionnement du circuit permet d'écrire que le champ électrique à l'intérieur du condensateur s'écrit $\vec{E}(M, t) = (\sigma(t)/\varepsilon_0)\vec{e}_z$.

On néglige les effets de bord. On admettra donc que le champ électrique est nul en dehors du condensateur.

I.C.1) Énoncer littéralement le théorème de Gauss. Ce théorème est-il valable pour tous les régimes temporels ? Dans le cadre des hypothèses de l'énoncé peut-on dire que le champ électrique est uniforme à l'intérieur du condensateur ? Quel phénomène physique a-t-on négligé pour pouvoir écrire la relation $\vec{E}(M, t) = (\sigma(t)/\varepsilon_0)\vec{e}_z$ à l'intérieur du condensateur ?

I.C.2)

a) Donner l'expression de l'équation locale de Maxwell-Ampère dans le cas général. Simplifier cette expression pour un point M intérieur au condensateur. En déduire l'expression intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère pour un point M intérieur au condensateur sous la forme :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M,t) \cdot d\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt} f(\vec{E})$$

où $f(\vec{E})$ est une expression intégrale contenant le champ électrique $\vec{E}$.
On rappelle la relation

$$\iint_{s} \overrightarrow{rot}(\vec{G}).d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{G}.d\overrightarrow{OM}$$

où S est une surface s'appuyant sur le contour fermé et orienté Γ.

b) Pour un point M intérieur au condensateur :

- préciser soigneusement quelles sont les sources du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$,
- indiquer la direction du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ en analysant soigneusement les symétries des sources du champ magnétique.
- indiquer les coordonnées dont dépend a priori le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ en analysant les transformations laissant invariant les sources du champ magnétique,

c) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ pour un point M intérieur au condensateur en fonction de $d\sigma/dt$ et d'autres paramètres. Quelle est l'expression du champ magnétique en un point extérieur au condensateur situé dans la région $0 \le z \le e$, $r \ge a$?
On considère une surface S séparant deux milieux repérés par les indices 1 et 2. On note $\vec{n}_{1 \to 2}$ un vecteur normal à la surface S, orienté du milieu 1 vers le milieu 2. Rappeler l'expression de la relation liant les champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ régnant dans les milieux 1 et 2 à proximité immédiate de la surface S. En relation avec l'expression précédente, que peut-on dire du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ à la traversée de la surface $0 \le z \le e$, $r = a$?

I.C.3)

a) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ pour un point M intérieur au condensateur.

b) Déterminer la puissance électromagnétique rayonnée $P_{em}(t)$ à travers la surface Σ (définie ci-après) en fonction de $\sigma(t)$ et d'autres paramètres.

La surface Σ est la surface fermée constituée des éléments suivants :

- les deux disques du condensateur,

- le cylindre d'axe Oz, de rayon $r = a$ et de hauteur e.

En déduire l'énergie électromagnétique E_{em} échangée par le condensateur avec son environnement en fonction de Q et $C = \varepsilon_0 \pi a^2 / e$. Commenter le signe et la forme de l'expression obtenue.

Partie II - Étude du mouvement d'un satellite

La terre est assimilée à une boule homogène de centre O de rayon $R = 6370\ \mathrm{km}$ et de masse $M = 5,98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$. On note $k = 6,67 \cdot 10^{-11}$ U.S.I. la constante de gravitation universelle. On étudie le mouvement du centre d'inertie G d'un satellite de masse $m = 10^3\ \mathrm{kg}$ en se plaçant dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Le satellite évolue à une altitude suffisamment importante pour qu'on puisse négliger l'action de l'atmosphère terrestre.

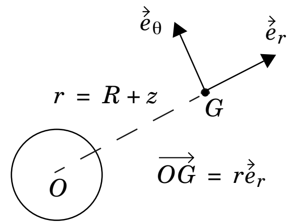

Figure 2 : notations adoptées

La figure 2, qui n'est pas à l'échelle, précise les coordonnées adoptées pour ce problème.

II.A - Analyse qualitative

II.A.1)

a) Donner l'expression de la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par la terre sur le satellite. On note respectivement M, L, T la dimension d'une masse, d'une longueur et d'un temps. Déterminer la dimension de la constante de gravitation k en fonction des symboles M, L, T. On exprimera la dimension de k sous la forme $M^\alpha L^\beta T^\gamma$ et on déterminera la valeur numérique des exposants α,β et γ. Indiquer pourquoi on peut dire que le mouvement de G est un mouvement à force centrale ?

Quelles sont les conséquences de la remarque précédente (aucun calcul n'est demandé) ?

b) Définir le référentiel géocentrique. Est-ce que ce référentiel est solidaire de la terre dans son mouvement de rotation autour des pôles ? Indiquer pourquoi ce référentiel n'est pas en toute rigueur galiléen. Citer le nom d'un référentiel galiléen.
À quelle condition qualitative peut-on considérer que le référentiel géocentrique est galiléen lorsqu'on réalise une expérience ?

II.A.2)

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation $E_p(z)$ en fonction de $z = r - R$. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système ? Définir les termes « état lié » et « état de diffusion » pour un système soumis à une force conservative.

b) Donner l'ordre de grandeur de la hauteur de l'atmosphère terrestre. Si l'on tenait compte de l'action de l'atmosphère sur le satellite comment évoluerait qualitativement l'énergie mécanique du satellite (on justifiera la réponse). En déduire l'évolution qualitative de l'altitude z et la vitesse v du satellite si l'on prenait en compte l'action de l'atmosphère terrestre.

II.B - Étude de la trajectoire circulaire du satellite

II.B.1)

a) En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement de G est plan. On admettra qu'à un instant pris comme origine des dates le moment cinétique du satellite calculé en O est non nul : $\vec{L}_O(t=0) \neq 0$. On précisera où cette dernière hypothèse intervient dans le raisonnement. Préciser alors le plan de la trajectoire.

b) Dans le plan du mouvement, on repère la position de G par ses coordonnées polaires r, θ. Montrer que l'accélération de G s'écrit

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_\theta .$$

Déterminer les deux équations du mouvement. On notera C une constante intervenant dans l'une des équations.

II.B.2)

a) On étudie la possibilité d'une trajectoire circulaire de rayon $r = r_0$. Montrer que le mouvement est uniforme. Déterminer alors la vitesse angulaire $d\theta/dt = \omega_0$ du mouvement en fonction de k, M et r_0. Déterminer la constante C en fonction de k, M et r_0.

b) Le satellite évolue à une altitude $z = 600\ \mathrm{km}$ sur une trajectoire circulaire. Calculer numériquement :

- la période de révolution $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ dans le référentiel géocentrique,
- l'énergie mécanique E_m,
- la constante C.

II.B.3) On suppose dorénavant que le satellite possède une trajectoire circulaire contenue dans le plan équatorial. On note $T \approx 24\ \mathrm{h}$ la période de révolution terrestre dans son mouvement autour de l'axe des pôles. Évaluer la période relative T_r de révolution du satellite pour un observateur terrestre en fonction des paramètres $T_0 = 2\pi/\omega_0$ et T.

On pourra, par exemple, raisonner dans le référentiel géocentrique à partir d'un schéma figurant deux positions successives du satellite à l'aplomb d'un observateur terrestre. On tiendra compte d'une part du fait que que le satellite possède une période de rotation T_0 inférieure à la période de rotation terrestre et d'autre part du fait que le satellite et la terre tournent dans le même sens. Calculer numériquement la période T_r pour un satellite évoluant à une altitude $z = 600\ \mathrm{km}$.

II.C - Étude de l'influence du champ magnétique terrestre sur le satellite

Lors de sa mise sur orbite circulaire, le satellite acquiert une charge électrique négative Q due aux interactions avec l'atmosphère terrestre. On étudie dans cette partie, l'influence du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_0}$ sur le mouvement du satellite chargé. **On raisonne dans un référentiel terrestre**. On suppose qu'initialement la trajectoire du satellite est une trajectoire circulaire, de rayon $r = R + z$, $z = 600\ \mathrm{km}$, contenue dans le plan équatorial. Le mouvement du satellite s'effectue à la vitesse angulaire $\omega_r = 2\pi/T_r$ d'ouest en est.

On modélise grossièrement la forme des lignes de champ magnétique terrestre par des cercles (fixes dans un référentiel terrestre) dont les caractéristiques vérifient les éléments suivants :

- les cercles ont pour centre le point O, centre de la terre,
- le plan de chaque cercle est un plan méridien, perpendiculaire au plan équatorial,
- les cercles sont orientés du pôle sud **géographique** vers le pôle nord **géographique**.

On supposera de plus que le champ magnétique terrestre varie peu sur des distances de l'ordre de grandeur des dimensions du satellite.

II.C.1) Donner un ordre de grandeur du module du champ magnétique terrestre mesuré au sol. Connaissez-vous l'une des sources du champ magnétique terrestre ? Donner un ordre de grandeur des champs magnétiques continus les plus intenses que l'homme sait réaliser à l'heure actuelle.

II.C.2) Donner l'expression de la force magnétique $\vec{F}$ subie par le satellite. Réaliser un schéma représentant :

- le plan de la trajectoire orientée du satellite vue du pôle Nord géographique,
- le sens du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_0}$,
- le sens de la force magnétique.

Quelle est l'influence de la force magnétique sur le mouvement du satellite ?

II.C.3) Indiquer pourquoi on peut prévoir l'existence d'un champ électrique $\vec{E}$ dans le satellite. Donner l'expression de ce champ électrique. Préciser son sens sur le schéma précédent . Donner un ordre de grandeur d'une des dimensions du satellite dont on rappelle que la masse est $m = 10^3$ kg . En déduire un ordre de grandeur de la tension électrique U_m qui peut apparaître entre deux points du satellite $(z = 600\ \text{km})$. On utilisera pour la valeur numérique du champ magnétique B_0, la valeur retenue en II.C.1. Commenter la valeur numérique de U_m.

II.D - Étude de la stabilité de la trajectoire circulaire

On se place de nouveau dans le **référentiel géocentrique** et l'on ignore la charge électrique portée par le satellite ($Q = 0$). Afin d'étudier la stabilité de la trajectoire circulaire on suppose qu'à un instant pris comme origine des dates le satellite est faiblement écarté de sa trajectoire circulaire. On pose $r = r_0(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. On note $\varepsilon_0 = \varepsilon(t=0)$ et on suppose que $\dfrac{d\varepsilon}{dt}(t=0) = 0$.

Dans toute la suite du problème on raisonnera au premier ordre en ε. On rappelle la relation $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$. Compte tenu des hypothèses, on admettra qu'on peut écrire au premier ordre $r^2 d\theta/dt \approx C$ où la constante C a la valeur calculée à la question II.B.2.a.

II.D.1)

a) Déterminer, **sans approximation** supplémentaire, l'équation vérifiée par la variable ε. On établira une équation où ne figure plus le paramètre θ.

b) Montrer qu'au premier ordre l'équation précédente s'écrit $d^2\varepsilon/dt^2 = -\omega_1^2\varepsilon$. Donner l'expression de la pulsation ω_1. Que remarque-t-on ? Conclure quant à la stabilité de la trajectoire. Déterminer $\varepsilon(t)$.

II.D.2)

a) Exprimer au premier ordre la pulsation $d\theta/dt$ en fonction du temps et des données du problème.

Quel résultat retrouve-t-on si dans l'expression précédente on réalise $\varepsilon_0 = 0$?

b) Esquisser la forme de la trajectoire issue de l'analyse précédente. Quelle est la forme de la trajectoire exacte ? Quelle conclusion peut-on faire concernant les résultats obtenus précédemment ? On s'attachera, en particulier, à discuter l'existence de trajectoire circulaire pour le mouvement du centre d'inertie du satellite.

••• FIN •••