MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème I désigne un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

où f est une application continue définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.

On verra que l'espace des solutions contient une solution f_1 ayant un comportement particulier en $+\infty$.

Les parties I et II portent sur deux exemples. La partie III met en place l'application $\Phi : f \mapsto f_1$ dans un cadre général. Les Parties IV à VI envisagent diverses propriétés de la fonction f et sont largement indépendantes.

Les symboles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les corps des nombres réels et des nombres complexes.

Partie I - Étude d'un premier exemple

I.A - Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence et donner la valeur des expressions suivantes :

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt, \qquad e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt$$

I.B - On considère l'équation différentielle

$$y' - y + \cos x = 0 \text{ , } x \in \mathbb{R}$$

Déterminer une fonction Y_0 bornée et une fonction g telles que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle puisse se mettre sous la forme

$$Y_\lambda(x) = \lambda g(x) + Y_0(x) \text{, où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Donner sans démonstration le résultat analogue relatif à l'équation différentielle $y' - y + \sin x = 0$.

I.C - Soit Π le plan vectoriel engendré par les fonctions *cosinus* et *sinus* dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$$

Filière MP

où α et β sont des nombres réels. Pour tout $f \in \Pi$, on définit f_1 par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt$$

I.C.1) Montrer que la transformation $f \mapsto f_1$ définit une application $\Phi : \Pi \to \Pi$. La linéarité de Φ étant considérée comme évidente, donner la matrice de Φ dans la base de Π constituée des fonctions *cosinus* et *sinus*.

I.C.2) On munit Π de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Déterminer une constante $k > 0$ telle que, pour tout $f \in \Pi$, on ait

$$\|f_1\|_\infty \le k\|f\|_\infty$$

Pour $f \in \Pi$, on définit par récurrence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_1 = \Phi(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

Étudier l'existence de la limite de cette suite relativement à la norme définie sur Π et déterminer la valeur de cette limite.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0\,.$$

II.A - Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0+\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.

Quelle expression donner à la solution générale Y_λ, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

On note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution Y_λ.

II.B - Pour tout point $m(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note Y_m la solution de l'équation vérifiant $Y_m(x_m) = y_m$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative.

II.B.1) Déterminer l'ensemble $\mathscr{H}$ des points m tels que $Y'_m(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathscr{I}$ des m tels que $Y''_m(x_m) = 0$. Donner sans démonstration une interprétation géométrique pour chacun des ensembles $\mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$.

II.B.2) Quelle est la place de la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la solution Y_0 par rapport aux courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$?
(on pourra faire des intégrations par parties sur $Y_0(x) = e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$).

II.B.3) Tracer sans explication sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathscr{H}$, $\mathscr{I}$, $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\lambda_1}$, $\mathscr{C}_{\lambda_2}$, où λ_1 et λ_2 sont des réels respectivement négatif et positif.

Partie III - La transformation Φ

On suppose maintenant que I est un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$, a pouvant être égal à $-\infty$.

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ f \;\middle|\; \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = 0 \right\}$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions f négligeables en $+\infty$ devant une certaine fonction puissance $x \mapsto x^{\alpha}$ (α dépendant de f).

III.A - Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$

Étant donné $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, on considère l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

III.B - Montrer que E_f admet une unique solution $f_1 \in \mathcal{E}$ définie par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt .$$

On définit l'application Φ: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $\Phi(f) = f_1$; elle est évidemment linéaire.

III.C - Soit Φ^n la composée n fois de Φ avec elle-même. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose $f_n = \Phi^n(f)$ (avec $f_0 = f = \phi^0(f)$). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de I,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément vers une constante sur tout compact de I,

(iii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact de I.

III.D - Montrer que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u) e^{-u} du$$

(on pourra raisonner par récurrence en écrivant $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$ et intégrer par parties).

III.E - L'application linéaire

$$\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ f \mapsto f_1$$

est-elle injective ? Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des applications $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $g \in \mathcal{E}$ et $g' \in \mathcal{E}$.

Partie IV - Fonctions bornées

Soit $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. $\mathcal{B}$ étant un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ (défini au III), l'application Φ est définie sur $\mathcal{B}$.

IV.A - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{B}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution bornée f_1 .

IV.B - On munit $\mathcal{B}$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}$$

L'application Φ est-elle continue pour cette norme ?

IV.C - Soit $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_0$) le sous-espace de $\mathcal{B}$ des fonctions ayant une limite (resp. une limite nulle) en $+\infty$, $\mathcal{K}$ le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$.

Montrer que ces sous-espaces sont stables par Φ.

IV.D - Montrer, à l'aide du III.D, que pour tout $f \in \mathcal{L}$, la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ vers une constante que l'on précisera (couper l'intervalle d'intégration en exprimant que f a une limite en $+\infty$).

IV.E - Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une injection de $\mathcal{B}$ dans le sous-espace des fonctions bornées de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto \sin(x^2)$ est-elle dans l'image de Φ ? Préciser l'image de Φ.

Partie V - Fonctions périodiques

Soit $\mathscr{P}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques.

V.A - Montrer que pour tout $f \in \mathscr{P}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution périodique f_1.
Cette fonction f_1 est-elle somme de sa série de Fourier ?

V.B - Quel lien a-t-on entre les coefficients de Fourier complexes $c_k(f)$ et $c_k(f_1)$?

V.C - Soit $\mathscr{P}_0$ le sous-espace des $f \in \mathscr{P}$ dont la valeur moyenne

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

est nulle et $\mathscr{K}$ le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{P}$.
Montrer que pour tout $f \in \mathscr{P}$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une constante que l'on précisera.

V.D - Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une bijection de $\mathscr{P}$ sur le sous-espace $\mathscr{P}_1$ des fonctions 2π-périodiques de classe C^1.

V.E - On considère sur $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_1$ les normes N_1 et N_2 suivantes :

$$N_1(f) = \int_0^{2\pi} |f(t)|dt \, , \, N_2(f) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

Les applications Φ et Φ^{-1} sont-elles continues pour la norme N_1 ? Même question pour la norme N_2.

Partie VI - Fonctions polynomiales

Soit d un entier naturel et $\mathscr{FP}_d$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $d+1$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à d.

VI.A - Soit une famille $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d)$ de $d+1$ nombres réels distincts. Pour tout $f \in \mathscr{FP}_d$, on pose

$$N_\xi(f) = \sup_{0 \le i \le d} |f(\xi_i)|$$

Montrer que c'est une norme sur $\mathscr{FP}_d$.

VI.B - Soit une suite de fonctions polynomiales de $\mathcal{FP}_d$

$$x \mapsto f_n(x) = a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \ldots + a_{0,n}$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$,

(iii) il existe $d+1$ nombres réels distincts $\xi_0, \ldots, \xi_d$ tels que, pour tout indice $0 \leq i \leq d$, la suite $(f_n(\xi_i))$ converge.

(iv) chacune des $d+1$ suites numériques $(a_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, pour $0 \leq i \leq d$,converge.

VI.C - Pour tout $f \in \mathcal{FP}_d$, montrer que l'équation différentielle E_f a une unique solution $f_1 = \Phi(f)$ dans $\mathcal{FP}_d$.

On note encore $\Phi : f \mapsto f_1$; Φ est considéré ici comme un endomorphisme de $\mathcal{FP}_d$.

VI.D - Pour f fonction polynomiale de degré d, on forme la suite de fonctions polynomiales (f_n) où $f_n = \Phi^n(f)$. Cette suite vérifie-t-elle les conditions équivalentes de VI.B ?

••• FIN •••
