

PHYSIQUE II

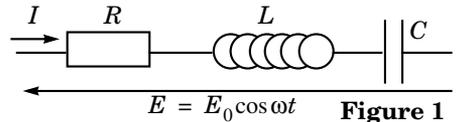
Étude de quelques aspects du phénomène de résonance

Les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes.

Partie I - Étude d'un circuit RLC

I.A - Résonance série

Le dipôle de la figure 1 (une bobine d'inductance L et de résistance R est montée en série avec un condensateur de capacité C), alimenté par une tension sinusoïdale



$$E = E_0 \cos \omega t$$

de pulsation ω variable, est parcouru par un courant

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

I.A.1) Exprimer l'impédance complexe Z_s de ce dipôle.

I.A.2) En déduire l'impédance (réelle) Z_s de ce dipôle et le retard de phase φ du courant I sur la tension E en fonction de la pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et du facteur de qualité

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

de ce circuit.

I.A.3) Tracer le graphe du rapport

$$\frac{Z_s}{R}$$

en fonction du rapport

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Filière TSI

I.A.4) Quelle est la valeur maximale $I_{0\text{Max}}$ de l'amplitude I_0 du courant ? Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte ?

Tracer les graphes du rapport

$$\frac{I_0}{I_{0\text{Max}}}$$

et de la phase φ en fonction de x .

I.A.5) L'acuité de la résonance est définie par le rapport

$$A = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \text{ où } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \text{ (avec } \omega_2 > \omega_1 \text{)}$$

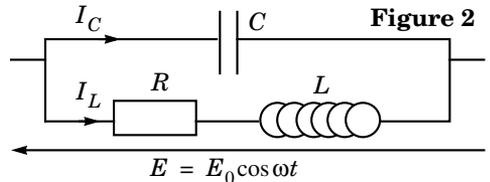
représente la bande de pulsations dans laquelle l'amplitude du courant vérifie

$$I_0(\omega) \geq \frac{I_{0\text{Max}}}{\sqrt{2}}.$$

Déterminer A en fonction de Q . Dans quel domaine varie la phase φ pour $\omega \in [\omega_2, \omega_1]$?

I.B - Résonance parallèle

On considère maintenant le dipôle de la figure 2 (la bobine L , R est montée en dérivation avec le condensateur C), alimenté par la tension sinusoïdale $E = E_0 \cos \omega t$ de pulsation ω variable.



I.B.1) Exprimer l'impédance complexe Z_P de ce dipôle en fonction de R , L , C et ω .

I.B.2) En déduire l'expression Z_P en fonction de R , C , ω , Q , ω_0 et Z_s (Q , ω_0 et Z_s ayant été définis à la question précédente).

I.B.3) Montrer que, lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q \gg 1$) et la pulsation ω pas trop faible

$$\left(Q \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \right),$$

\underline{Z}_P peut se mettre sous la forme approchée :

$$\underline{Z}_P \approx \frac{Q^2 R^2}{\underline{Z}_s}$$

On utilisera ce résultat dans toute la suite de la question I.B.

I.B.4) Quelle est la valeur de \underline{Z}_P pour la pulsation ω_0 ? Quel est alors le comportement de ce circuit ?

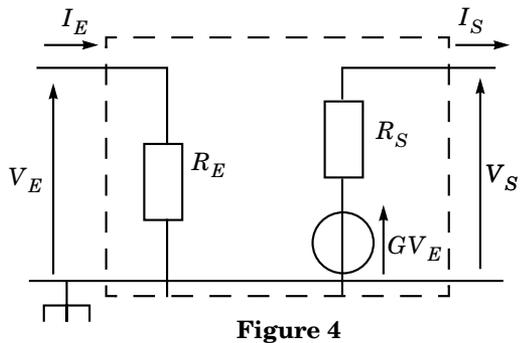
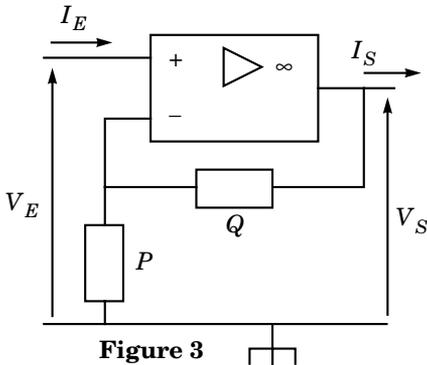
I.B.5) On suppose $\omega = \omega_0$. Déterminer les valeurs approximatives des intensités réelles I_L et I_C qui traversent respectivement la bobine et le condensateur en fonction de R , Q , ω , du temps t et de l'amplitude E_0 de la tension d'alimentation du dipôle. Commenter les résultats obtenus.

Partie II - Étude d'un montage électronique

II.A - Dans le montage amplificateur de la figure 3, l'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire. Alimenté par une tension d'entrée V_E , il délivre une tension de sortie V_S .

Calculer le rapport $\frac{V_S}{V_E}$. Que vaut le courant d'entrée I_E ?

II.B - La figure 4 représente de manière symbolique l'amplificateur de tension équivalent au circuit de la figure 3. Déterminer le gain G (G est une constante réelle et positive), la résistance d'entrée R_E et la résistance de sortie R_S de cet amplificateur.



II.C - On considère le circuit de la figure 5 contenant deux amplificateurs de tension tels que celui représenté figure 4, l'un de gain $G_1 = 1$ et l'autre de gain G_2 légèrement inférieur à 2. On pose

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

II.C.1) Ce circuit est alimenté par une tension sinusoïdale $E = E_0 \cos \omega t$ de pulsation ω variable ; déterminer le rapport \underline{H}

entre les tensions complexes de sortie \underline{S} et d'entrée \underline{E} :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \text{ en fonction de } G_2 \text{ et du rapport } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

II.C.2) Calculer le module H de \underline{H} en fonction de x . Déterminer en particulier la valeur maximale H_{Max} de H . Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte (ne pas oublier que G_2 est voisin de 2 tout en étant inférieur à 2) ? Calculer l'acuité de la résonance A en fonction de G_2 (A a été définie dans la partie I). Comment peut-on faire varier facilement cette acuité ?

II.C.3) Tracer le graphe de H en fonction de x .

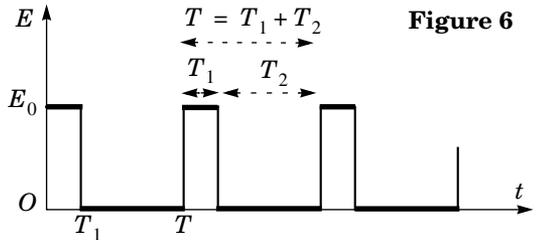
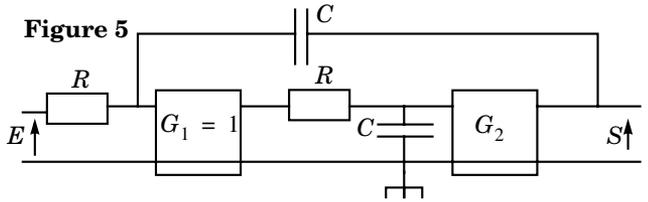
II.C.4) On suppose $R = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $G_2 = 1,8$. Le circuit est maintenant alimenté par une tension $E(t)$ rectangulaire périodique de période $T = 1 \text{ ms}$, de rapport cyclique

$$a = \frac{T_1}{T} = 0,2$$

et d'amplitude

$$E_0 = 1 \text{ V},$$

représentée figure 6. Déterminer la valeur de la tension de sortie S en régime établi, compte tenu des valeurs numériques.



Partie III - Oscillations d'une bobine dans un champ magnétique

Dans le référentiel $(Oxyz)$: vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, supposé galiléen, une bobine $MNPQ$, plate, rigide, de forme carrée de côté a , constituée de N spires (d'un fil homogène de section négligeable) jointives, de résistance R , d'inductance négligeable, peut tourner autour de l'axe Oz sans frottement. L'axe Oz coïncide avec l'axe de symétrie de la bobine et on désigne par J le moment d'inertie de celle-ci par rapport à Oz . Cette bobine est plongée dans un champ magnétique radial \vec{B}_0 , perpendiculaire à Oz , qui règne dans les entrefers formés par les pôles d'un aimant permanent et un noyau cylindrique intérieur en fer. Elle est reliée à un générateur de tension sinusoïdale $E = E_0 \cos \omega t$ et, en régime sinusoïdal établi, elle est parcourue par un courant sinusoïdal I ; sa position est repérée par l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{n})$, \vec{n} désignant le vecteur unitaire normal à la bobine (figures 7 et 8).

Enfin, la bobine est soumise à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $\vec{\Gamma} = -k\theta\vec{e}_z$. On supposera que la norme B_0 du champ \vec{B}_0 agit sur toute la longueur a des côtés opposés MN et PQ et est supposée constante dans le domaine de variation de θ .

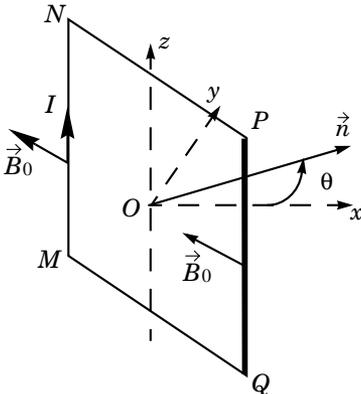


Figure 7 : l'aimant et le noyau ne sont pas représentés

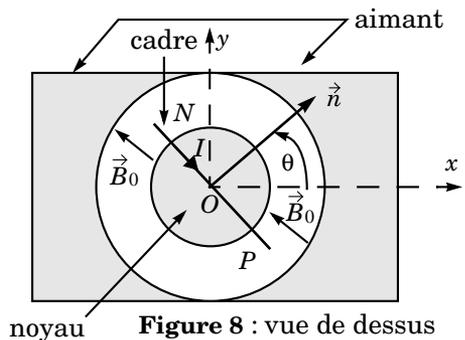


Figure 8 : vue de dessus

III.A - Quel est le moment des efforts de Laplace qui s'exercent sur le côté MN ? Sur le côté PQ ? En déduire celui qui s'exerce sur la bobine puis « l'équation différentielle mécanique » qui relie les variables θ et I .

III.B - Exprimer la force électromotrice d'induction induite par le mouvement de la bobine, puis écrire « l'équation différentielle électrique » qui relie les variables θ et I .

III.C - En déduire que l'équation différentielle à laquelle satisfait l'angle θ se met sous la forme :

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + k\theta = s \cos \omega t$$

et exprimer les coefficients constants h et s en fonction de la constante $\phi_0 = Na^2 B_0$, de R et E_0 .

III.D - On pose

$$\omega_0^2 = \frac{k}{J}, \quad 2\varepsilon\omega_0 = \frac{h}{J}, \quad D = \frac{s}{k} \quad \text{et on suppose } \varepsilon \ll 1 \text{ USI.}$$

En quelles unités se mesurent respectivement les coefficients ω_0 , ε et D ? Justifier brièvement vos réponses.

III.E - En régime sinusoïdal établi, on cherche une solution de la forme

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Exprimer l'amplitude θ_0 des oscillations en fonction de D , ε , ω_0 et ω . Comparer l'expression du rapport

$$\frac{\theta_0}{D} \quad \text{et celle de } H \text{ obtenue lors de la partie II.}$$

Quelle est l'expression du facteur correspondant au coefficient ε dans l'expression de H ?

III.F - Déterminer la valeur maximale $\theta_{0 \text{ Max}}$ de l'amplitude θ_0 de l'oscillation de la bobine. Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte (ne pas oublier que $\varepsilon \ll 1$ USI) ? Déterminer également la valeur de l'acuité A de la résonance mécanique de la bobine.

III.G - Application numérique : on donne

$$\omega_0 = 1 \text{ USI}, \quad \varepsilon = 0,1 \text{ USI}, \quad D = 0,1 \text{ USI}.$$

III.G.1) Calculer $\theta_{0 \text{ Max}}$.

III.G.2) Quel est le mouvement de la bobine lorsqu'elle est alimentée par une tension sinusoïdale de fréquence $f > 20$ Hz ? Pourquoi évoque-t-on ce domaine de fréquences ? Quel paramètre faudrait-il modifier si l'on souhaite que la bobine puisse détecter de manière significative un faible courant de fréquence $f = 100$ Hz ?

III.H - Quel intérêt peut présenter un montage électronique tel que celui de la figure 5 ?

Partie IV - Oscillations d'une tige

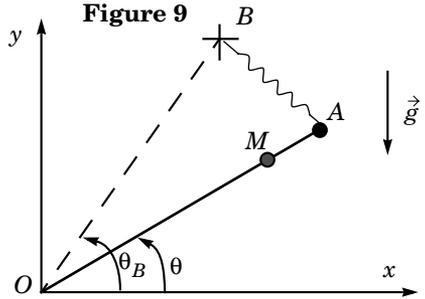
Sur une tige OA , de masse négligeable et de longueur a , est soudé à une distance $OM = b$ ($b < a$) un point matériel de masse m . Cette tige peut osciller sans frottement autour de l'axe Oz horizontal du référentiel $(Oxyz)$: vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, et sa position est repérée par l'angle

$$\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OA}).$$

Un ressort relie l'extrémité A de la tige à un point B fixe dont la position est définie par la longueur $OB = a$ et l'angle constant

$$\theta_B = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OB});$$

ce ressort exerce sur la tige en A une force \vec{F} proportionnelle à sa longueur soit $\vec{F} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ (k désignant une constante positive). Enfin, l'air ambiant exerce sur la tige un couple de frottement fluide $\vec{\Gamma} = -h\dot{\theta} \vec{e}_z$ de faible intensité. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (figure 9).



IV.A - Montrer que le moment cinétique de la tige OA dans le référentiel $(Oxyz)$ se met sous la forme :

$$\vec{L}_O = \alpha m b^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

et donner la valeur de la constante α .

IV.B - Le référentiel $(Oxyz)$ lié au sol est supposé galiléen.

IV.B.1) En appliquant le théorème du moment cinétique en O à la tige OA , dans le référentiel $(Oxyz)$, en projection sur l'axe Oz , déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait l'angle θ .

IV.B.2) Quelle est la position d'équilibre θ_E de la tige ? On souhaite que θ_E soit nul. Quelles conditions doivent vérifier les différents paramètres pour qu'il en soit ainsi ? On supposera cette condition remplie dans toute la suite.

IV.C - On suppose que le sol, et donc le référentiel $(Oxyz)$, est animé d'un mouvement de translation vertical et sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude y_0 soit :

$$y = y_0 \cos \omega t.$$

IV.C.1) Quelle est, dans le référentiel non galiléen $(Oxyz)$, l'expression de la force d'inertie d'entraînement qui s'exerce sur la tige OA ? Quelle est celle de

son moment par rapport à O ? Quelles sont les expressions correspondantes relatives à la force d'inertie de Coriolis ?

IV.C.2) En appliquant le théorème du moment cinétique en O à la tige OA , dans le référentiel $(Oxyz)$, en projection sur l'axe Oz , déterminer la nouvelle équation différentielle à laquelle satisfait l'angle θ .

IV.C.3) On pose

$$\omega_0^2 = \frac{g}{b \tan \theta_B}, \quad 2\lambda\omega_0 = \frac{h}{mb^2} \quad \text{et on suppose } \lambda \ll 1.$$

On suppose que θ reste petit et, en régime sinusoïdal établi, on cherche une solution de la forme $\theta = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Exprimer l'amplitude θ_0 des oscillations en fonction de y_0 , λ , ω_0 , b et ω .

IV.C.4) Quelle est la valeur maximale $\theta_{0 \text{ Max}}$ de l'amplitude θ_0 des oscillations ? Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte (ne pas oublier que $\lambda \ll 1$) ? Déterminer également la valeur de l'acuité A de la résonance.

IV.C.5) Tracer le graphe du rapport

$$\frac{b\theta_0}{y_0}$$

en fonction du rapport

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

IV.C.6) Quel peut être l'intérêt de ce dispositif ?

IV.C.7) Application numérique : on donne $b = 10 \text{ cm}$, $\lambda = 0,1$. Le sol vibre à la fréquence $f = 0,1 \text{ Hz}$ avec une amplitude $y_0 = 1 \text{ mm}$. Quel paramètre peut-on facilement régler pour obtenir la résonance de la tige à la fréquence f de vibration du sol ? Donner la valeur numérique correspondante de ce paramètre. Calculer la valeur numérique de $\theta_{0 \text{ Max}}$.

••• FIN •••
