MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, P désigne le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, de son repère orthonormé canonique $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ de son orientation canonique et de son repère polaire canonique.

On appellera **conique** toute partie $\mathscr{C}$ (vide ou non) de P ayant une équation de la forme

$$\{M_{(X,Y)} \in \mathscr{C}\} \Leftrightarrow \{AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0\}$$

où A, B, C, D, E, F sont six réels, avec en outre A, B, C non tous nuls.

À tout (A, B, C, D, E, F), élément de $\mathbb{R}^6$ tel que A, B, C non tous nuls correspond ainsi une conique $\mathscr{C}$, que l'on pourra noter $\mathscr{C}_{(A, B, C, D, E, F)}$.

Le but du problème est notamment l'étude de l'ensemble des points communs à certains ensembles de coniques.

Partie I - Préliminaires

I.1) Montrer que les fonctions $\theta \mapsto \cos 2\theta$; $\theta \mapsto \sin 2\theta$; $\theta \mapsto \cos\theta$; $\theta \mapsto \sin\theta$; $\theta \mapsto 1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ forment une famille libre dans l'espace des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

I.2) Soit un cercle quelconque du plan P, que l'on supposera de rayon $\rho > 0$. Montrer que si le cercle est inclus dans la conique $\mathscr{C}_{(A, B, C, D, E, F)}$, alors $A = C$ et $B = 0$. Réciproquement, que peut-on dire d'une conique $\mathscr{C}_{(A, 0, A, D, E, F)}$?

Filière PC

Partie II -

On note $P' = P\backslash\{Oy\}$ le plan P privé de l'axe des ordonnées. On note M_0 un point de coordonnées (X_0, Y_0) appartenant à P'.

Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des coniques $\mathscr{C}_{(A, B, C, D, E, F)}$ satisfaisant aux quatre conditions :

$$\begin{cases} M_0 \in \mathscr{C} \\ A = C \end{cases} \qquad \begin{cases} E = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$

II.A -

II.A.1) Montrer que le seul élément, noté $(\mathscr{C}_1)$, de $\mathscr{E}_1$ qui soit un cercle a pour équation $x_0(X^2 + Y^2) - (x_0^2 + y_0^2)X = 0$.

Montrer que $(\mathscr{C}_1)$ est tangent à l'axe Oy et indiquer une construction géométrique de son centre.

II.A.2) Montrer qu'il existe un seul élément, noté $(\mathscr{C}_2)$, de $\mathscr{E}_1$ qui ait une équation de la forme $BXY + CX = 0$. En indiquer une caractérisation géométrique.

II.A.3) Déterminer $(\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2)$. En discuter le nombre d'éléments. En déduire l'ensemble des points communs à tous les éléments de $\mathscr{E}_1$.

II.B - On appelle φ l'application de P' dans P qui, au point M de coordonnées polaires (ρ, θ), tel que $\rho \neq 0$ et que pour tout entier relatif k, $\theta \neq (2k+1)\pi/2$, associe M' de coordonnées polaires $\left(\rho \tan\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

II.B.1) Montrer que cette définition de $\varphi(M)$ est *cohérente*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de (ρ, θ) parmi les coordonnées polaires possibles du point M. Montrer que $\varphi(M_0)$ appartient à toutes les coniques de $\mathscr{E}_1$. En déduire une construction géométrique de $\varphi(M_0)$ à l'aide d'un cercle et d'une droite.

II.B.2) Pour $M \in P'$, quand a-t-on $\varphi(M) \in P'$? Que dire alors de $\varphi \circ \varphi(M)$?

II.B.3) On appelle γ la courbe d'équation polaire

$$\theta \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \rho = 2a\sin\theta, \text{ où } a > 0 \text{ est donné.}$$

Reconnaître γ ; déterminer une représentation polaire de la courbe $\gamma' = \varphi(\gamma)$; étudier et tracer cette courbe, *avec justifications.*

II.C - Dans cette question, $M_0(x_0, y_0)$ est un point de P' tel que $|x_0| \neq |y_0|$ et on lui associe $M'_0 = \varphi(M_0)$ comme ci-dessus.

II.C.1)

a) Montrer que, quel que soit le couple λ, μ de réels non tous nuls, il existe un unique réel ν, que l'on calculera, tel que la conique $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$ d'équation $\lambda(X^2 + Y^2) + 2\mu XY + \nu X = 0$ appartienne à $\mathscr{E}_1$.

b) Lorsque $|\lambda| \neq |\mu|$, montrer que $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$ a un centre $\Omega_{\lambda,\mu}$ dont on déterminera les coordonnées. [*Pour ce faire, il est possible d'effectuer une translation arbitraire de l'origine du repère puis de faire en sorte que la nouvelle origine devienne centre de symétrie de la conique* $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$.]

II.C.2) Le point M_0 restant fixé, montrer que tous les points $\Omega_{\lambda,\mu}$ (où $|\lambda| \neq |\mu|$) appartiennent à la conique Γ d'équation

$$X^2 - Y^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2x_0} X + y_0 Y = 0 .$$

En déterminer le genre, le centre, les sommets et les axes.

II.C.3) Déterminer les intersections de Γ avec les droites Ox, Oy, OM_0, OM'_0 et $M_0M'_0$. On trouvera en général six points en tout, pour lesquels le centre de Γ joue un rôle particulier que l'on mettra en évidence.

II.C.4) Faire une figure d'ensemble.

II.C.5) Étudier et représenter $(\mathscr{C}_{1,1})$ et $(\mathscr{C}_{1,-1})$. On réalisera la figure en prenant $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Que remarque-t-on quant à leurs axes ?

On identifiera pour la suite du problème les espaces vectoriels euclidiens canoniques $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On désignera par i le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Partie III -

On admet que le déterminant de Vandermonde

$$V(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^2 & z_3^3 \\ 1 & z_4 & z_4^2 & z_4^3 \end{vmatrix}$$

en les complexes z_1, z_2, z_3, z_4 est nul si, et seulement si, deux au moins des z_i sont égaux.

Dans cette partie et la suivante, on étudie un problème analogue à celui de la première, mais par une méthode sensiblement différente.

III.A - On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des parties de $\mathbb{R}^2$ ayant une équation de la forme $A\bar{z}z + B(z^2 + \bar{z}^2) + \bar{C}z + C\bar{z} + D = 0$ où les réels A, B, D et le complexe C ne sont pas tous les quatre nuls, et qui contiennent trois points M_1, M_2, M_3 *non alignés* donnés, d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3.

III.A.1) Vérifier que les éléments $\mathcal{E}_2$ sont bien des coniques et donner une propriété commune de leurs axes.

III.A.2) Pour z_4 donné dans $\mathbb{C}$, on définit les matrices

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 z_1 & z_1^2 + \bar{z}_1^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ \bar{z}_2 z_2 & z_2^2 + \bar{z}_2^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ \bar{z}_3 z_3 & z_3^2 + \bar{z}_3^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \\ \bar{z}_4 z_4 & z_4^2 + \bar{z}_4^2 & z_4 & \bar{z}_4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Établir que la matrice $\tilde{\mathcal{M}}$ est inversible. Quelle conclusion peut-on en tirer quant au rang de $\mathcal{M}$?

b) On définit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. En donner la dimension. Montrer que

$$S = \left\{ (A, B, C, D) \in E, \forall i \in \{1, 2, 3\}, A\bar{z}_i z_i + B(z_i^2 + \bar{z}_i^2) + C\bar{z}_i + \bar{C}z_i + D = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E et en donner la dimension.

c) Montrer que le point M_4 d'affixe z_4 appartient à toutes les coniques éléments de $\mathcal{E}_2$ si, et seulement si, le rang de $\mathcal{M}$ est égal à 3. [*Pour la condition nécessaire, on pourra faire intervenir un système linéaire bien choisi*.]

III.B - On suppose dans cette question que les complexes z_1, z_2, z_3 sont égaux respectivement à $a\exp(i\theta_1)$, $a\exp(i\theta_2)$ et $a\exp(i\theta_3)$, où $a > 0$ et θ_1, θ_2, θ_3 sont des réels.

III.B.1) Montrer qu'il existe un unique cercle dans $\mathcal{E}_2$ et que si le point M_4 d'affixe z_4 appartient à toutes les coniques éléments de $\mathcal{E}_2$, alors z_4 est de la forme $a\exp(i\theta_4)$.

III.B.2) Soit le déterminant

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} z_1^2 & z_1^4 + a^4 & z_1^3 & z_1 \\ z_2^2 & z_2^4 + a^4 & z_2^3 & z_2 \\ z_3^2 & z_3^4 + a^4 & z_3^3 & z_3 \\ z_4^2 & z_4^4 + a^4 & z_4^3 & z_4 \end{vmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{D}$ est de la forme $(z_1z_2z_3z_4 - a^4)\ \mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ s'exprime très simplement à l'aide de $V(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

III.B.3) Montrer que la condition énoncée en III.A.2-c) est équivalente à la nullité de $\mathcal{D}$.

III.B.4)

a) En déduire l'ensemble des points communs aux coniques de $\mathcal{E}_2$. Discuter soigneusement le nombre d'éléments de cet ensemble.

b) Lorsque ce nombre est égal à 4, que peut-on dire des directions des bissectrices du couple de droites (M_1M_2, M_3M_4) ?

III.C -

III.C.1) Généraliser les résultats de III.B.4 au cas où l'on ne fait plus l'hypothèse III.B. [*On montrera comment on peut se ramener à ce cas.*]

III.C.2) Soit trois points A, B, C non alignés dans P et (Δ) une droite. Par A, $\text{resp}\cdot B$, $\text{resp}\cdot C$, on mène la parallèle à la symétrique de la droite BC, $\text{resp}\cdot CA$, $\text{resp}\cdot AB$, par rapport à (Δ). Montrer que ces trois droites concourent. [*On pourra commencer par le cas où (Δ) est l'axe Ox ; dans ce cas, il suffit d'utiliser les résultats de la partie III.*]

Partie IV -

On considère dans cette partie des équations de la forme

$$\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0 \qquad (1)$$

où $A \neq 0$ et B sont deux complexes et C un réel.

IV.A -

IV.A.1) Soit θ un réel et Φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z\exp(i\theta)$. Montrer que, si $(\Gamma) \subset P$ a une équation de la forme (1), alors on peut choisir θ pour que $\Phi(\Gamma)$ ait une équation de la forme

$$\frac{A'}{2}(z^2 + \overline{z}^2) + \overline{B'}z + B'\overline{z} + C' = 0$$

où l'on ait de plus $A' \in \mathbb{R}^{+*}$.

IV.A.2) En déduire la nature d'une telle partie (Γ) de P. [*On pourra revenir en coordonnées cartésiennes.*]

IV.B - Soit trois points M_1, M_2, M_3 *non alignés* donnés, d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3. On appelle $\mathscr{E}_3$ l'ensemble des coniques de P contenant ces trois points et ayant une équation de la forme (1). Soit M_4 un point de P, d'affixe z_4. Montrer que toutes les coniques de $\mathscr{E}_3$ passent par M_4 si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\mathscr{M}' = \begin{bmatrix} z_1^2 & \overline{z_1}^2 & z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2^2 & \overline{z_2}^2 & z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3^2 & \overline{z_3}^2 & z_3 & \overline{z_3} & 1 \\ z_4^2 & \overline{z_4}^2 & z_4 & \overline{z_4} & 1 \end{bmatrix}$$

est égal à une valeur que l'on précisera.

IV.C - Dans cette question, on suppose que de plus z_1, z_2 et z_3 sont de même module $a > 0$ et ont a^3 pour produit.

IV.C.1) Déterminer deux complexes u et v tels que z_1, z_2 et z_3 soient solutions de $Z^3 - uZ^2 + vZ - a^3 = 0$.

IV.C.2) En déduire des complexes α, α', β, β' tels que z_1, z_2 et z_3 soient solutions de

$$\begin{cases} H_1(Z) = Z^2 + \alpha Z + \beta - a\overline{Z} = 0 \\ H_2(Z) = Z + \alpha' + \beta'\overline{Z} - \dfrac{1}{a}\overline{Z^2} = 0 \end{cases}$$

IV.C.3) Grâce à des combinaisons linéaires bien choisies sur les rangées de $\mathscr{M}'$, montrer que toutes coniques de $\mathscr{E}_3$ passent par M_4 si, et seulement si,

$$H_1(z_4) = H_2(z_4) = 0 \qquad (2)$$

IV.C.4)

a) Montrer qu'il existe un polynôme $\varpi(Z)$ à coefficients complexes, de degré 4, tel que (2) implique $\varpi(z_4) = 0$; on donnera d'un tel polynôme les coefficients en Z^4 et en Z^3, en fonction de a, u et v.

b) Déterminer les zéros de ϖ en en discutant la multiplicité. [*On remarquera que trois zéros de ϖ sont déjà connus.*] On ne demande pas de vérifier qu'inversement tous les complexes obtenus vérifient (2).

IV.C.5) On choisit $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$.

a) Déterminer la valeur du produit scalaire $\langle \overrightarrow{M_1M_4}, \overrightarrow{M_2M_3} \rangle$. [*On pourra introduit le produit* $(\overline{z_4 - z_1})(z_3 - z_2)$.]

b) Que représente M_4 pour le triangle $M_1M_2M_3$?

IV.D - Généraliser les résultats de IV.C.5-b) au cas où l'on ne fait plus l'hypothèse du IV.C.

••• FIN •••
