MATHÉMATIQUES II

Notations et objectifs du problème

Dans tout ce problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $d \geq 1$. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E est noté $(u|v)$, la norme du vecteur u est notée $\|u\|$.

L'espace des endomorphismes de E est noté $L(E)$. Le composé de deux éléments f et g de $L(E)$ est noté indifféremment fg ou $f \circ g$ et l'identité I_E. L'adjoint de f est noté f^* ; on rappelle qu'il est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ (f(u)|v) = (u|f^*(v)).$$

Si f est un élément de $L(E)$, $Tr(f)$ désigne la trace de f. Le composé de p exemplaires de f est noté f^p (avec, par convention, $f^0 = I_E$). Si F est un sous espace de E stable par f, l'endomorphisme induit par f sur F est noté f_F.

On notera $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques (ou autoadjoints) de E et $S^+(E)$ le sous ensemble de $S(E)$ constitué des endomorphismes symétriques dont les valeurs propres sont positives.

On rappelle que, si $t \mapsto x(t)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans E et $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ une base de E, par rapport à laquelle les coordonnées de $x(t)$ sont $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_d(t)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \sum_{i=1}^{d} x_i(t) e_i$$

alors x est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, si et seulement si, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ l'application $t \mapsto x_i(t)$ est une application de classe C^k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit f un élément de $L(E)$ et x_0 un élément de E. On considère l'équation

$$\mathcal{P}(f, x_0) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dont l'inconnue x est la fonction $t \mapsto x(t)$ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans E.

On rappelle que, pour tout x_0 de E, il existe une unique solution de $\mathcal{P}(f, x_0)$. On l'appelle f-trajectoire de x_0.

Filière PSI

Afin d'alléger la rédaction, on conviendra que toute propriété géométrique d'une trajectoire x concerne en réalité l'ensemble $x(\mathbb{R}) = \{x(t) | t \in \mathbb{R}\}$; par exemple, on dira que la trajectoire x est un cercle si $x(\mathbb{R})$ est un cercle.

On désigne par $B(E)$ l'ensemble des f, éléments de $L(E)$, tels que toutes les f – trajectoires sont bornées, c'est-à-dire sont telles que, quel que soit le choix de x_0, il existe un réel $M \geq 0$, dépendant de x_0, pour lequel on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|x(t)\| \leq M,$$

si x désigne la f – trajectoire de x_0.

De même, on note $SP(E)$ l'ensemble des f, éléments de $L(E)$, tels que toutes les f – trajectoires sont sphériques, c'est-à-dire sont telles que, quel que soit le choix de x_0, il existe un élément $\gamma \in E$ et un réel $r \geq 0$, dépendants de x_0, pour lesquels on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|x(t) - \gamma\| = r,$$

si x désigne la f – trajectoire de x_0.

L'objectif du problème est de caractériser les ensembles $B(E)$ et $SP(E)$.

Partie I - Étude de trajectoires

I.A - Soit F un sous-espace de E, stable par f. Montrer que si $x_0 \in F$, la f – trajectoire de x_0 est contenue dans F.

I.B - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et x la f – trajectoire de x_0. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, λ, t.

I.C - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un élément de $\operatorname{Ker} f^2$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} f$ et x la f – trajectoire de x_0. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, $f(x_0)$, t et préciser la nature géométrique de cette trajectoire.

I.D - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un élément de $E - \{0\}$. On suppose qu'il existe un réel ϕ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ et un réel k strictement positif tels que

$$(f^2 - 2k\cos\phi f + k^2 I_E)(x_0) = 0.$$

On note $t \mapsto x(t)$ la f – trajectoire de x_0.

I.D.1) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0))$ est libre et justifier l'existence de deux applications u et v de $\mathbb{R}$ dans E, telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0).$$

I.D.2) Montrer que u et v sont de classe C^2. Former une équation différentielle linéaire du second ordre, avec deux conditions initiales, vérifiée par u. En déduire l'expression de u.

I.D.3) Montrer que x est bornée si et seulement si $\cos\phi = 0$. Dans ce cas, décrire géométriquement la $f-$trajectoire x. À quelles conditions cette trajectoire est-elle un cercle ?

I.E - Soit k un réel strictement positif, f un élément de $L(E)$, $g = f^2 + k^2 I_E$ et x_0 un élément de $\operatorname{Ker} g^2$. On désigne par G la famille

$$G = \{x_0, f(x_0), g(x_0), gf(x_0)\}.$$

I.E.1) Montrer que $F = \operatorname{vect}(G)$ est stable par f.

I.E.2) Montrer que G est libre si et seulement si $g(x_0) \neq 0$.

I.E.3) On suppose que $g(x_0) \neq 0$. Montrer que la $f-$trajectoire de x_0 peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0).$$

Déterminer $u(t)$, $v(t)$, puis $w(t)$, puis $h(t)$. Montrer que cette trajectoire n'est pas bornée.

Partie II - Étude des endomorphismes à trajectoires bornées

Dans les questions II.A à II.D incluses, f désigne un endomorphisme de E tel que toutes les $f-$trajectoires sont bornées : $f \in B(E)$.

II.A - Soit λ une valeur propre réelle de f. Montrer que $\lambda = 0$.

II.B - Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

II.C - Exhiber, *sans démonstration*, un polynôme *non nul*, à coefficients réels, qui annule f. Démontrer qu'il existe un polynôme unitaire à coefficient réel qui est de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ annulant f.

Dans toute la suite de la section II.C, ce polynôme est noté P.

II.C.1) Soit Q $(Q \in \mathbb{R}[X])$ un diviseur non constant de P. Montrer que $Q(f)$ ne peut être inversible.

II.C.2) On suppose que P admet une racine réelle λ. Montrer que $\lambda = 0$ et, en s'aidant de la question II.B, que l'ordre de multiplicité de cette racine dans P est égal à 1.

II.C.3) Que dire de f si P est scindé sur $\mathbb{R}$?

II.C.4) On suppose que P possède une racine complexe λ non réelle. On écrit λ sous forme trigonométrique : $\lambda = ke^{i\phi}$, avec k et ϕ réels, $k > 0$ et ϕ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$. Démontrer qu'il existe un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que : $(f^2 - 2k(\cos\phi)f + k^2 I_E)(x_0) = 0$. En déduire la valeur de $\cos\phi$. Qu'en conclure sur les racines non réelles de P ?

II.C.5) Soit $k > 0$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + k^2 I_E)^2 = \mathrm{Ker}(f^2 + k^2 I_E)$.

II.C.6) On suppose $f \neq 0$; démontrer qu' il existe un entier $s \geq 1$ et des réels $a_1, a_2, \ldots, a_s$ strictement positifs et distincts tels que P soit de l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$P = \prod_{i=1}^{s} (X^2 + a_i^2) \text{ ou } X \prod_{i=1}^{s} (X^2 + a_i^2).$$

II.D - Prouver que f vérifie les deux propriétés suivantes :

i) L'endomorphisme f^2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels négatifs ou nuls.

ii) $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2$.

Prouver que les dimensions des sous-espaces propres de f^2 associés à ses valeurs propres strictement négatives sont paires.

II.E - Réciproquement soit f un élément de $L(E)$, non nul et vérifiant les deux propriétés i) et ii) de la question II.D). Établir l'existence d'un entier s strictement positif, de s sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tous non réduits à $\{0\}$, de dimensions paires et stables par f et de s réels $a_1, a_2, \ldots, a_s$, strictement positifs et distincts, tels que :

$$\mathrm{Ker}\, f \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} E_i \right] = E \qquad (1)$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\},\ \forall x \in E_i, f^2(x) = -a_i^2 x \qquad (2)$$

Étudier la $f-$trajectoire d'un vecteur appartenant à l'un des E_i et en conclure que $f \in B(E)$.

Partie III - Étude des endomorphismes à trajectoires sphériques

III.A -

III.A.1) Soit f un élément de $L(E)$. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a) $f^* + f = 0$

b) $\forall u \in E$, $(u|f(u)) = 0$.

Un endomorphisme vérifiant l'une de ces deux propriétés est appelé *endomorphisme antisymétrique* de E. L'ensemble de ces endomorphismes est noté $A(E)$.

III.A.2) Soit f un élément de $A(E)$ et x une f–trajectoire associée ; calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \|x(t)\|^2$. Montrer que $A(E) \subset SP(E)$.

III.B - Soit f un élément de $SP(E)$ et F un sous-espace de E stable par F. Montrer que f_F est élément de $SP(F)$.

III.C - Montrer que $SP(E) \subset B(E)$.

III.D - Dans cette section III.D, E est de dimension 2 et f est un élément non nul de $SP(E)$.

III.D.1) Démontrer que f^2 est une homothétie de rapport strictement négatif.

III.D.2) Soit x_0 un élément de $E - \{0\}$ et a le centre d'un cercle contenant la f–trajectoire de x_0. Justifier que a peut s'écrire sous la forme $\alpha x_0 + \beta f(x_0)$ et prouver que $(x_0|f(x_0)) = 0$.

III.D.3) Prouver que $A(E) = SP(E)$.

III.E - Dans cette section III.E, E est un espace vectoriel orienté de dimension 3.

Soit ω un élément de $E - \{0\}$ et v un vecteur de E orthogonal à ω. On définit l'endomorphisme ψ de E par $\psi : u \mapsto \omega \wedge u + (u|\omega)v$.

III.E.1) Montrer que ψ est antisymétrique si et seulement si $v = 0$.

III.E.2) Montrer que si v est non nul, ψ appartient à $SP(E)$.

On pourra commencer par prouver que pour tout x_0 de E, si x désigne la f–trajectoire de x_0, $(x|\omega)$ est constant et l'on cherchera le centre de la sphère sous la forme $\alpha(\omega + \omega \wedge v)$, où α est une constante à déterminer.

On se propose de prouver que tout endomorphisme f élément de $SP(E)$, *non nul* est de la même forme que ψ.

III.E.3) Soit f un élément de $SP(E) - \{0\}$. Établir que f^2 n'admet qu'une seule valeur propre strictement négative, notée $-\mu^2$ et que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f^2 + \mu^2 I_E)$.

III.E.4) En déduire l'existence d'une base orthonormée de E où la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu & b \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et conclure.

III.F - On suppose, dans cette question, que f, élément de $SP(E)$, vérifie $f^2 = -\mu^2 I_E$ où $\mu > 0$. À l'aide des résultats des questions III.B et III.D, montrer que f est antisymétrique.

III.G - Démontrer que, dans le cas général, $SP(E)$ est constitué des endomorphismes $f \in L(E)$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

i) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

ii) L'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$ est antisymétrique.

Ces deux conditions étant supposées réalisées, préciser géométriquement en fonction de x_0 élément de E, le centre d'une sphère qui contient la f-trajectoire de x_0.

••• FIN •••
