MATHÉMATIQUES I

Partie I -

On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

où n désigne un entier naturel.

I.A -

I.A.1) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

I.A.2) En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

I.B -

I.B.1) Montrer l'équivalence : $I_n \sim I_{n+1}$.

I.B.2) Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $J_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante et en déduire l'équivalence : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I.B.3) **Application 1**
Montrer, lorsque t, réel, tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^t dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

I.B.4) **Application 2**
À l'aide de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x dx$, montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} |\sin x|^x dx$ est divergente.

I.C - On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln n!$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

I.C.1) Montrer l'équivalence :

$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}.$$

I.C.2) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On notera S sa limite.

Filière TSI

I.D - Établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim C n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n} .$$

I.E - En utilisant la question I.B.2, en déduire l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} .$$

Partie II -

On considère les séries entières :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n .$$

II.A - Montrer que la première série entière définit une fonction continue sur $[-1, 1[$ et calculer sa somme f.

II.B - On considère la seconde série entière.

II.B.1) Déterminer son rayon de convergence. On note g sa somme, là où elle converge.

II.B.2) Montrer que cette série entière converge pour $x = -1$ et calculer $g(-1)$.

II.C - Déterminer la limite à gauche de g en 1.

II.D -

II.D.1) Montrer l'existence d'une limite l à gauche en 1 de $g(x) + \ln(1 - x)$.

II.D.2) On pose, pour n entier strictement positif,

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n .$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

II.D.3) Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel γ strictement positif.

II.E - Établir que $l = -\gamma$.

II.F - Une expression intégrale de γ.

On pose $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right) \mathrm{dt}$.

II.F.1) Montrer l'existence de I.

II.F.2) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx$ et que l'application $\Phi : x \mapsto \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

II.F.3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$I = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x) dx .$$

II.F.4) Montrer que pour $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx = \int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx .$$

II.F.5) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx .$$

II.F.6) En déduire $I = \gamma$.

Partie III -

On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$. On fait les hypothèses suivantes :

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.
- La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.
- $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
- $b_n = o(a_n)$

On note u et v les sommes respectives de ces deux séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.

III.A -

III.A.1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

III.A.2) On fixe un réel ε strictement positif.
Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout x tel que $0 \le x < 1$,

$$|v(x)| \le \sum_{n=0}^{N} |b_n| + \frac{\varepsilon}{2} u(x) .$$

III.A.3) En déduire qu'au voisinage de 1

$$v(x) = o(u(x)) .$$

III.B - Montrer que si l'on remplace l'hypothèse $b_n = o(a_n)$ par $a_n \sim b_n$, alors au voisinage de 1 on a l'équivalence : $u(x) \sim v(x)$.

III.C - Application 1 :

III.C.1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \ge 1} n^3 \ln\left(\mathrm{ch}\frac{1}{n}\right) x^n .$$

III.C.2) Déterminer un équivalent simple en 1 de sa somme.

III.D - Application 2 :

On considère les séries entières

$$\sum_{n \ge 1} H_n x^n \text{ et } \sum_{n \ge 1} (\ln n) x^n \text{, où l'on a posé pour } n \ge 1$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

III.D.1) Vérifier que leur rayon de convergence est 1 et montrer que

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\ln(1-x) .$$

III.D.2) En déduire un équivalent au voisinage de 1 de

$$\sum_{n \ge 1} (\ln n) x^n .$$

On pourra utiliser II.D.3.

III.E - Application 3 :

On pose pour $x \in \left]-1, 1\right[$,

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}} dt .$$

III.E.1) Développer en série entière, au voisinage de 0, la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}}$. avec $a > 0$ et préciser son rayon de convergence.

III.E.2) Montrer pour tout $x \in \ ]-1, 1[$ la relation

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{2n} x^{2n},$$

avec I_{2n} les intégrales étudiées en partie I et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite que l'on explicitera.

III.E.3) Montrer qu'il existe une constante K réelle tel qu'au voisinage de 1 on ait l'équivalence : $J(x) \sim K \ln(1-x)$ et préciser la valeur de K.

Partie IV -

On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$. On fait les hypothèses suivantes :

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs non tous nuls.
- $A_n \sim B_n$, où l'on a posé

$$A_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \text{ et } B_n = \sum_{p=0}^{n} b_p$$

- Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est égal à 1 et la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

On note u et v les sommes respectives de ces deux séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.

IV.A - Vérifier l'égalité, pour tout x réel

$$(1-x) \sum_{p=0}^{n} A_p x^p = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p - A_n x^{n+1}.$$

et en déduire que le rayon de convergence de

$\sum_{n \geq 0} A_n x^n$ est égal à 1.

IV.B - Établir les relations, pour tout $x \in \,]-1, 1[$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

puis en déduire qu'au voisinage de 1, on a : $u(x) \sim v(x)$.

IV.C - Application 1 :

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} x^{a^n}$, où a est un entier supérieur ou égal à 2.
Vérifier que son rayon de convergence est 1 et montrer qu'au voisinage de 1, on a l'équivalence $\sum_{n=0}^{\infty} x^{a^n} \sim L \ln(1-x)$, où L est une constante réelle que l'on précisera.

IV.D - Application 2 :

IV.D.1) Montrer que les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$ sont de rayons de convergence 1 et que l'on a, au voisinage de 1, l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n .$$

IV.D.2) En déduire que l'on a, au voisinage de 1, l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n ,$$

où $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite étudiée dans la première partie.

IV.D.3) Montrer que pour $x \in \,]-1, 1[$, on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos t} .$$

IV.D.4) Calculer l'intégrale ci-dessus et en déduire qu'au voisinage de 1, on a l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{D}{\sqrt{1-x}} ,$$

où D est une constante réelle strictement positive que l'on précisera.

••• FIN •••
