MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, Π est un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$. On rappelle que les déplacements de Π sont les rotations et les translations de ce plan. On notera Id_π l'identité de Π.

Les matrices utilisées dans le problème sont réelles. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes.

On désigne par ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

Si A est une matrice carrée, on désigne par $\det(A)$ son déterminant et si $A \in M_3(\mathbb{R})$, on convient d'appeler écriture de A par blocs l'écriture

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix},$$

où $P \in M_2(\mathbb{R})$, Q est de la forme $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, R est de la forme $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}$, et S est de la forme $[s]$, avec q_1, q_2, r_1, r_2, s réels.

La matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$ est notée I.

Partie I - Questions préliminaires

I.A - Les matrices A, A' et leur produit AA' appartiennent à $M_3(\mathbb{R})$; on les écrit par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{bmatrix} \qquad AA' = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$$

I.A.1) En prélevant dans les matrices A et A' les termes utiles, calculer les deux termes de la matrice Y et montrer que $Y = PQ' + QS'$.

Des calculs analogues prouveraient que

$$AA' = \begin{bmatrix} PP' + QR' & PQ' + QS' \\ RP' + SR' & RQ' + SS' \end{bmatrix}, \text{ ce que l'on admettra.}$$

I.A.2) Donner sans justification l'écriture par blocs de la transposée de A.

Filière TSI

I.B -

I.B.1) On suppose que le couple (X_1, X_2) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et que X_1 et X_2 sont des vecteurs propres pour une certaine matrice B appartenant à $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que le couple $(-X_1, X_2)$ a les mêmes propriétés.

I.B.2) Soit $S \in M_2(\mathbb{R})$, qu'on suppose symétrique. Justifier l'existence dans $M_2(\mathbb{R})$ de trois matrices, N, L, D, avec N et L orthogonales et D diagonale, telles que $S = ND\,{}^tN = LD\,{}^tL$, où L est obtenue en remplaçant dans N la première colonne par son opposée.

I.B.3) En comparant $\det(N)$ et $\det(L)$, montrer que l'une des deux matrices N ou L est de la forme

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

I.C - Soit R une matrice de la forme $R(\theta)$ précédente, différente de I. Montrer que $R - I$ est inversible.

Partie II - Le Groupe $\mathcal{G}$

À tout triplet (θ, p, q) de nombres réels, on associe la matrice

$$M(\theta, p, q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p \\ \sin\theta & \cos\theta & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et son écriture par blocs, notée

$$\begin{bmatrix} R(\theta) & T(p, q) \\ 0 & [1] \end{bmatrix}, \text{ abrégée en } \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où les deux termes de la sous-matrice uniligne 0 sont nuls.

On appelle $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices de la forme $M(\theta, p, q)$.

II.A -

II.A.1) Calculer le déterminant de $M(\theta, p, q)$.

II.A.2) La matrice $M(\theta, p, q)$ est-elle orthogonale ?

II.B -

II.B.1) Calculer le produit $M(\theta, p, q) \cdot M(\theta', p', q')$ de deux matrices de $\mathscr{G}$. Montrer que ce produit appartient à $\mathscr{G}$.

II.B.2) Le triplet (θ, p, q) étant donné, comment choisir (θ', p', q') pour que le produit précédent soit la matrice identité I_3 ?

II.B.3) Montrer que, lorsqu'on le munit de la multiplication, l'ensemble $\mathscr{G}$ est un groupe.

II.C -

II.C.1) Montrer que le polynôme caractéristique de $M(\theta, p, q)$ est le produit de deux polynômes à coefficients réels, que l'on précisera.

II.C.2) On suppose que $R \neq I$.

a) Déterminer, selon les valeurs de θ, les valeurs propres réelles de $M(\theta, p, q)$.

b) Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ?

Trouver un vecteur propre de la forme $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre 1. On donnera de $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ une expression matricielle utilisant T et $(I - R)^{-1}$.

II.D - Chaque point P de Π est repéré par ses coordonnées (x,y) dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

II.D.1) Quelles sont les coordonnées (x',y') de l'image P' de P par la translation de vecteur $\vec{T} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j}$?

II.D.2) Le point P_0 de Π et le réel θ sont fixés. On désigne par r la rotation de centre P_0 et d'angle θ. Soit P' l'image de P par r.

Exprimer les coordonnées (x',y') de P' en fonction de x, y, θ, et des coordonnées (x_0, y_0) de P_0.

II.D.3) Montrer que, dans II.D.2) comme dans II.D.1), on peut trouver dans $\mathcal{G}$ une matrice M, que l'on précisera dans chacun des deux cas, telle que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

II.D.4)

a) Réciproquement, les réels θ, p, q, x, y étant donnés, calculer le produit matriciel $M(\theta, p, q) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Ce produit est de la forme $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$.

Montrer que le point P' de Π, de coordonnées (x', y'), est l'image du point P, de coordonnées (x, y), par un déplacement.

c) Lorsque ce déplacement est une rotation de centre $P_0(x_0, y_0)$ différente de l'identité de Π, on pose

$$V_{P_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \text{ Montrer que } V_{P_0} = (I - R)^{-1} T.$$

Partie III - Le groupe $\mathcal{G}$ et les matrices symétriques

Dans cette partie, on introduit l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$, donc de la forme générale

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Une telle matrice sera notée $Q(a, b, c, d, e, f)$, ou Q de façon abrégée.

Soit Q une matrice appartenant à $\mathcal{S}$. On appelle transformée de Q toute matrice de la forme ${}^tMQM$, où M est une matrice appartenant à l'ensemble $\mathcal{G}$ défini dans la partie II.

III.A - Soit Q une matrice appartenant à $\mathcal{S}$.

III.A.1) Montrer que toutes les transformées de Q appartiennent à $\mathcal{S}$.

III.A.2) Montrer que Q est une transformée de Q.

III.A.3) Montrer que si Q' est une transformée de Q, alors Q est une transformée de Q'.

III.A.4) Montrer que si Q' est une transformée de Q et Q'' une transformée de Q', alors Q'' est une transformée de Q.

Pour les questions qui suivent, on pourra utiliser les résultats de la partie I.A.

III.B - À toute matrice $Q(a, b, c, d, e, f)$, on associe les réels :

$$p_1(Q) = a + c \ ; \ p_2(Q) = ac - b^2 \ ; \ p_3(Q) = \det(Q)$$

et la matrice :

$$S(Q) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

III.B.1) Pour $M \in \mathscr{G}$, associée à θ, p, q, écrire $S({}^tMQM)$ comme un produit de trois matrices.

III.B.2) En déduire que, pour toute transformée Q' de Q, on a $p_1(Q) = p_1(Q')$ et $p_2(Q) = p_2(Q')$.

III.B.3) Montrer que, pour toute transformée Q' de Q, on a $p_3(Q) = p_3(Q')$.

Les nombres réels $p_1(Q), p_2(Q), p_3(Q)$ sont appelés les invariants de Q.

Dans la suite de cette section, on se propose, en considérant divers cas pour les invariants de Q, de trouver, dans chaque cas, une transformée simple de Q.

III.C -

III.C.1) Montrer que, parmi les transformées de $Q(a, b, c, d, e, f)$, il y a une matrice de la forme $Q(\lambda, 0, \mu, d', e', f')$, qu'on notera Q' dans la suite, (on pourra utiliser I.B.3) et III.B.1)).

III.C.2) Calculer $p_1(Q)$ et $p_2(Q)$ en fonction de λ et μ.

III.C.3) Montrer que, si $p_2(Q)$ est nul, on peut, en précisant le choix de Q', faire en sorte que μ soit nul.

III.D - Pour $M \in \mathscr{G}$, de la forme $M(0, p, q)$, calculer les termes non diagonaux de ${}^tMQ'M$.

III.E - Étude des différents cas

III.E.1) *Premier cas* : $p_2(Q)$ est non nul.

Montrer que, parmi les transformées de Q', il y a une matrice Q'' diagonale dont le troisième terme diagonal est nécessairement $p_3(Q)/p_2(Q)$.

III.E.2) *Deuxième cas* : $p_2(Q)$ est nul.

a) *Premier sous-cas* : $p_1(Q)$ et $p_3(Q)$ sont non nuls.

Montrer que, parmi les transformées de Q', il y a la matrice $Q(\lambda, 0, 0, 0, e', 0)$.

b) *Deuxième sous-cas* : $p_1(Q)$ est non nul et $p_3(Q)$ est nul.

Montrer que, parmi les transformées de Q', il y a une matrice de la forme $Q(\lambda, 0, 0, 0, 0, f'')$.

c) *Troisième sous-cas* : $p_1(Q)$ est nul.

Montrer que a, b et c sont nuls.

Partie IV - Application aux coniques

Les coefficients réels (a, b, c, d, e, f) étant fixés, on considère la courbe du plan Π, qui admet, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'équation cartésienne :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

Cette courbe est notée $\mathscr{C}(a, b, c, d, e, f)$, ou $\mathscr{C}$, de façon abrégée.

L'ensemble des courbes $\mathscr{C}$ est noté $\mathscr{F}$.

IV.A - *Étude d'un exemple*

On pose $\mathscr{H}_1 = \mathscr{C}(0, 1/2, 0, 0, -1/2, -1)$ et $\mathscr{H}_2 = \mathscr{C}(1, 0, -1, 0, 0, -2)$.

Représenter sur un même dessin les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ ainsi que leurs asymptotes.

Dans la suite, on associe au point P de coordonnées (x, y) la matrice

$$P_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

et à la matrice $Q(a, b, c, d, e, f)$ définie dans la partie III la courbe $\mathscr{C}(a, b, c, d, e, f)$.

IV.B - Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur le produit matriciel ${}^{t}P_1 Q P_1$, pour que le point P soit sur la courbe $\mathscr{C}$ associée à la matrice Q.

IV.C - Soit d un déplacement du plan, $d(P)$ l'image par d du point P et M la matrice, appartenant à $\mathscr{G}$, définie dans II.D.3), qui est associée à d.

IV.C.1) Trouver une condition nécessaire et suffisante, liant les matrices P_1, M et Q et leurs transposées, pour que le point $d(P)$ soit sur la courbe $\mathscr{C}$ associée à la matrice Q.

IV.C.2) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ de $\mathscr{F}$, associée à Q de $\mathscr{S}$, est l'image par d d'une courbe $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{F}$, associée à une matrice Q' de $\mathscr{S}$, que l'on précisera.

IV.C.3) Montrer que Q' est, suivant la définition donnée dans la partie II, une transformée de Q.

IV.D - En utilisant III.E, montrer que toute courbe $\mathscr{C}$ de $\mathscr{F}$ est l'image, par un certain déplacement, d'une courbe $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{F}$ d'équation simple.

IV.E - Montrer que si $\mathscr{C}$ est associée à la matrice Q, elle est aussi associée à αQ, pour tout α non nul.

Exemple : montrer, en utilisant III.E.1), que $\mathscr{H}_1$ est l'image de $\mathscr{H}_2$ par un déplacement que l'on ne cherchera pas à expliciter.

••• FIN •••
