MATHÉMATIQUES I

On étudie certaines classes de fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions bornées et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est muni de la norme uniforme définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$$

Pour tout ω appartenant à $\mathbb{R}$, on note e_ω la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule : $e_\omega(t) = e^{i\omega t}$.

On note U la fonction définie par $U(t) = 1$ si $t > 0$, $= 0$ sinon. Tous les sous-espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On notera x^* la conjuguée complexe de x, c'est-à-dire la fonction : $t \mapsto \overline{x(t)}$.

Partie I -

Soit x une fonction appartenant à $\mathcal{B}$. On appelle moyenne de x, s'il existe, le nombre

$$M(x) = \lim_{T \to \infty} M_T(x) \text{ avec } M_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad (1)$$

On dira alors que la fonction x est *moyennable*.

I.A -

I.A.1) Montrer que M_T est une forme linéaire sur $\mathcal{B}$, que l'ensemble des fonctions moyennables $\mathcal{M}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$, et que M est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_1$. On notera de façon équivalente Mx ou $M(x)$ cette moyenne.

I.A.2) Vérifier que M_T et M sont lipchitziennes pour $\|.\|_\infty$.

I.B - Montrer que la moyenne est invariante par translation : si $\tau \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{M}_1$ on pose $x_\tau(t) = x(t-\tau)$, alors x_τ est moyennable et $Mx = Mx_\tau$.

I.C -

I.C.1) Soit x une fonction de $\mathcal{B}$ de période P ($P > 0$). Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+P} x(t)dt = \int_0^P x(t)dt$. En déduire que x est moyennable, et que $M(x)$ est égale à la moyenne sur n'importe quel intervalle de longueur P.

Filière MP

I.C.2) En particulier montrer que $M(e_\omega) = 0$ pour ω réel non nul, et $M(e_0) = 1$.

I.C.3) Montrer que si $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = c$, alors x est moyennable et $M(x) = c$.

I.C.4) Soit x_0 la fonction définie par $x_0(t) = U(t)e^{i\ln(t+1)}$. Vérifier que $x_0 \in \mathscr{B}$, calculer $M_T(x_0)$. Examiner le comportement de $M_T(x_0)$ lorsque $T \to \infty$, et en déduire que x_0 n'est pas moyennable.

I.D - La fonction x est dite *de carré moyennable* si $T \mapsto M_T|x|^2$ admet une limite lorsque T tend vers $+\infty$. Cette limite est appelée moyenne quadratique de x :

$$M|x|^2 = \lim_{T \to \infty} M_T(|x|^2) \tag{2}$$

On notera $\mathscr{M}_2$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{B}$ de carré moyennable.

I.D.1) Montrer que toute fonction qui tend vers 0 à l'infini est aussi de moyenne quadratique nulle.

I.D.2) Pour $x, y \in \mathscr{M}_2$, donner une majoration de $\left|M_T(|x|^2) - M_T(|y|^2)\right|$ et $\left|M|x|^2 - M|y|^2\right|$ en fonction de $\|x\|_\infty$, $\|y\|_\infty$, $\|x-y\|_\infty$.

I.D.3) Montrer, à l'aide de x_0 et U, que $\mathscr{M}_2$ n'est pas un espace vectoriel.

I.E - On dira que deux fonctions, x, y de $\mathscr{M}_2$ sont *comparables* si existe

$$<x, y> = M(xy^*) = \lim_{T \to \infty} M_T(xy^*) \tag{3}$$

I.E.1) Si E est un espace vectoriel inclus dans $\mathscr{M}_2$, montrer que deux fonctions $x, y \in E$ sont comparables (développer $|x+y|^2$ et $|x+iy|^2$). Il en résulte que sur E, $(x, y) \mapsto <x, y>$ est un « pseudo-produit scalaire » (il est linéaire à gauche, semi-linéaire à droite, positif, mais pas strictement). On a en particulier

$$M|x+y|^2 = M|x|^2 + M|y|^2 + 2Re <x, y> \tag{4}$$

I.E.2) On dira que deux fonctions $x, y \in \mathscr{M}_2$, sont *orthogonales* si $<x, y> = 0$. Que vaut alors $M|x+y|^2$?

I.E.3) Écrire l'inégalité de Schwarz (on ne demande pas de la démontrer).

I.F - Soit P un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble des fonctions P-périodiques de $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel de fonctions de carré moyennable et comparables.

I.G - Soit

$$\mathcal{P} = \{x : x(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\omega_k t} \quad N \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, \omega_k \in \mathbb{R} \text{ distincts } \}$$

l'ensemble des polynômes trigonométriques (élargi par rapport à celui utilisé dans les séries de Fourier : ici les fréquences sont quelconques).

Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par produit de fonctions, et que l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

En particulier, pour $x = \sum_{k=1}^{N} c_k e_{\omega_k}$, établir que $M|x|^2 = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2$.

I.H - Soit une suite $x_n \in \mathcal{M}_1$ qui converge uniformément vers $x \in \mathcal{B}$.

I.H.1) Montrer l'existence de $m = \lim_{n \to \infty} M(x_n)$ (utiliser I.A.2).

I.H.2) En déduire que $x \in \mathcal{M}_1$ et $M(x) = m$ (pour $\epsilon > 0$, on choisira n tel que $\|x - x_n\|_\infty < \epsilon$ et $|m - M(x_n)| < \epsilon$).

I.I - Soit une suite $x_n \in \mathcal{M}_2$ qui converge uniformément vers $x \in \mathcal{B}$.

I.I.1) Montrer que $K = \sup \{\|x_n\|_\infty, \|x\|_\infty (n \in \mathbb{N})\} < +\infty$.

I.I.2) Montrer que $\lim_{n \to \infty} M|x_n|^2 = m_2$ existe.

I.I.3) En suivant la méthode du I.H.2), en déduire que $x \in \mathcal{M}_2$ et $M|x|^2 = m_2$.

Partie II -

On appelle $\mathcal{Q}$ l'ensemble des limites uniformes sur $\mathbb{R}$ de suites de fonctions appartenant à $\mathcal{P}$.

II.A - Montrer les propriétés suivantes :

II.A.1) $\mathcal{Q}$ est un espace vectoriel inclus dans $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$, et fermé pour $\|.\|_\infty$.

II.A.2) Toutes les fonctions de $\mathcal{Q}$ sont comparables, et continues.

II.A.3) Si $x \in \mathcal{Q}$, alors $\forall \tau \in \mathbb{R} \qquad x_\tau \in \mathcal{Q}$.

II.A.4) Si $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < +\infty$ et $\omega_k \in \mathbb{R}$, la série de fonctions

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_{\omega_k}$$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{Q}$.

II.A.5) $\mathcal{Q}$ est stable par produit des fonctions.

II.A.6) Soit $x, x \in \mathcal{Q}$, à valeurs réelles, et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que $y \circ x \in \mathcal{Q}$ (le montrer d'abord lorsque y est une fonction polynomiale à coefficients complexes).

II.B - Les *coefficients de Fourier-Bohr* de $x \in \mathcal{Q}$ sont définis, pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}$, par $c(\omega) = \langle x, e_\omega \rangle$.
Si P_n est une suite de $\mathcal{P}$ convergeant uniformément vers x, la réunion Ω des fréquences présentes dans chacun des P_n est un ensemble fini ou dénombrable que l'on énumère donc selon le cas $\Omega = \{\omega_k,\ 0 \le k \le m\}$ ou $\Omega = \{\omega_k, k \in \mathbb{N}\}$ .On pose

$$P_n = \sum_k c_{n,k}\, e_{\omega_k} \text{ et } d(n) = \max\{k : c_{n,k} \ne 0\}, \text{ « degré » de } P_n .$$

Montrer que pour tout réel $\omega, c(\omega)$ existe et vaut $c(\omega) = \lim_{n \to \infty} \langle P_n, e_\omega \rangle$. En déduire que :

si $\omega \notin \Omega$ alors $c(\omega) = 0$, et pour tout k, $c(\omega_k) = c_k = \lim_{n \to \infty} c_{n,k}$.

II.C - Si Ω est fini, montrer que

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k e^{i\omega_k t}.$$ En déduire la formule de Parseval : $$M|x|^2 = \sum_{k=0}^{m} |c_k|^2 .$$

II.D - On se propose d'établir la formule de Parseval dans le cas où Ω est infini. On construit la suite n_j définie par $n_0 = 0$, $n_k = \min(n : d(n) > d(n_{k-1}))$. Soit $q_k(t) = P_{n_k}(t)$, on a donc $d_k = d(n_k)$ suite strictement croissante vers $+\infty$ (le fait que la suite n_j existe est admis).

II.D.1) On pose

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} c_k e_{\omega_k}.$$ Calculer $M|x - S_N|^2$ et en déduire que $$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \le M|x|^2 .$$

II.D.2) Pour tout $k \geq 0$, montrer que $x - S_{d_k}$ est orthogonal au sous-espace vectoriel E_k engendré par les e_{ω_j} où $0 \leq j \leq d_k$. En déduire que

$$M|x - q_k|^2 \geq M|x - S_{d_k}|^2 = M|x|^2 - \sum_{j=0}^{d_k} |c_j|^2$$

II.D.3) Déduire alors de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de P_n vers x que

$$\lim_{k \to \infty} M|x - q_k|^2 = 0$$

En conclure que

$$\lim_{n \to \infty} M|x - S_n|^2 = 0 \,,\; M|x|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \tag{5}$$

Partie III -

Pour une fonction $x \in \mathscr{B}$, la *fonction de corrélation* de x est définie (si cela existe) par

$$\tau \in \mathbb{R} \quad \gamma_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle = \lim_{T \to \infty} M_T(x x^*_\tau) \tag{6}$$

où $*$ est la conjugaison complexe.

On appellera *fonction stationnaire* une fonction x pour laquelle $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\gamma_x(\tau)$ existe.

III.A - Montrer qu'une fonction stationnaire appartient à $\mathscr{M}_2$.

III.B - Montrer que $|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0)$, et que $\gamma_x(-\tau) = \gamma_x(\tau)^*$.

III.C - Si x est stationnaire, montrer qu'il en est de même de $y = e_\omega x$ et que, pour tout τ appartenant à $\mathbb{R}$, on a $\gamma_y(\tau) = \gamma_x(\tau) e^{i\omega\tau}$.

III.D -

III.D.1) Si x appartient à $\mathscr{Q}$, montrer que x est stationnaire. On note $\{\omega_k, c_k\}$ ses fréquences et coefficients de Fourier-Bohr, et S_n le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k e_{\omega_k}$$

III.D.2) Pour tout $\tau, \tau \in \mathbb{R}$, calculer $\gamma_{S_n}(\tau)$.

III.D.3) Montrer que γ_x est la somme de la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 e_{\omega_k}$$

normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et que γ_x appartient à $\mathcal{Q}$ (on majorera $|\gamma_x(\tau) - \gamma_{S_n}(\tau)|$ en fonction de $M|x - S_n|^2$).

III.E - Soit x une fonction $1-$périodique de $\mathcal{B}$.

III.E.1) Montrer qu'elle est stationnaire, et que γ_x est aussi $1-$périodique.

III.E.2) On note

$$a_k = \int_0^1 x(t) e^{-2i\pi kt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

les coefficients de Fourier complexes de x. Montrer que les coefficients de Fourier de γ_x sont $c_k = |a_k|^2$.

III.F - Soit $E(t)$ la partie entière de t et $F(t) = t - E(t)$ sa partie fractionnaire. La fonction x_1 définie par $x_1(t) = e^{-2i\pi aF(t)}$ où a est un réel irrationnel, est une fonction $1-$périodique de $\mathcal{B}$, de coefficients de Fourier complexes a_k.

III.F.1) Calculer les a_k. Que vaut

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \ ?$$

III.F.2) Calculer $\gamma_{x_1}(\tau)$ pour $\tau \in [0, 1[$ et vérifier que γ_{x_1} est continue sur $\mathbb{R}$.

III.F.3) En déduire que $\gamma_{x_1} \in \mathcal{Q}$. Calculer

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 (a+k)^2}.$$

••• FIN •••