MATHÉMATIQUES II

Notations : on désigne par K le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$. Lorsque $K = \mathbb{C}$ et $z \in K$, $|z|$ est le module de z et $i^2 = -1$. Pour les entiers n et $p \geq 1$, on note :

- K^n le $K-$espace vectoriel des vecteurs $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ avec $z_j \in K$ pour $j = 1, 2, \ldots n$.
- $M_{n,p}(K)$ les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K ; et $M_n(K) = M_{n,n}(K)$.

On identifie K^n et $M_{n,1}(K)$ donc, en calcul matriciel un vecteur s'identifie avec la matrice colonne ayant les mêmes éléments. Pour $A \in M_{n,p}(K)$, on note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq p}$ lorsqu'on veut préciser les éléments de A ; quand le contexte est clair, on écrit simplement $A = (a_{ij})$ ou $A = (A_{ij})$. Pour $x \in K^n$, D_x est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de x. Pour $A \in M_n(K)$, σ_A désigne le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A et $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_A\}$. Pour $A \in M_n(K)$, ${}^tA$ est la transposée de A ; et pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^* = {}^t\overline{A}$ (c'est-à-dire $A^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$). $S_n(K)$ désigne le sous-ensemble des matrice symétriques de $M_n(K)$. Pour $K = \mathbb{R}$, $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont respectivement les sous-ensembles des matrices symétriques positives et définies positives de $S_n(\mathbb{R})$. On rappelle qu'une matrice symétrique A est positive (resp. définie positive) lorsque la forme quadratique qu'elle définit ne prend que des valeurs positives (resp. strictement positives) sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Partie I -

I.A - Dans cette partie, on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $(\|\ \|_\infty)$ soit $\|z\|_\infty = \max_{j=1,\ldots n}|z_j|$.

On définit l'application $A \in M_n(\mathbb{C}) \to N_\infty(A) = \max_{i=1,\ldots n} \sum_{j \in [1,2,\ldots n]} |a_{ij}|$.

I.A.1) Montrer que $A \to N_\infty(A)$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

I.A.2)

a) Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$: $\|A(z)\|_\infty \leq N_\infty(A)\|z\|_\infty$.

Filière MP

b) Montrer l'égalité

$$N_\infty(A) = \max_{z \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})} \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}.$$

c) Montrer que $\rho(A) \le N_\infty(A)$.

I.A.3) Montrer que N_∞ est une norme matricielle c'est-à-dire qu'elle vérifie :
$\forall A$ et $B \in M_n(\mathbb{C})$, $N_\infty(AB) \le N_\infty(A)N_\infty(B)$.

I.A.4) Soit $Q \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. On définit

$$A \in M_n(\mathbb{C}) \to N_Q(A) = N_\infty(Q^{-1}AQ).$$

a) Vérifier que N_Q est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer qu'il existe une constante C_Q telle que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \qquad \frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \le N_Q(A) \le C_Q N_\infty(A).$$

I.B -

Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et $\varepsilon > 0$ donné.
Montrer que l'on peut choisir une matrice diagonale $D_S \in M_n(\mathbb{C})$ avec $S = (s, s^2, s^3, \ldots s^n) \in \mathbb{C}^n$ où s est un réel strictement positif telle que :

$$N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon.$$

Étant donnés $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que

$$N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon.$$

I.C - En déduire l'équivalence $\lim_{k \to \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Partie II -

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ fixée ; pour $i \in [1, 2, \ldots n]$ on pose : $L_i = \sum_{j \in [1, 2, \ldots n] j \neq i} |a_{ij}|$

$C_i = \sum_{j \in [1, 2, \ldots n] j \neq i} |a_{ji}|$.

On définit les sous-ensembles du plan complexe :

$$G_L(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A) \text{ et } D_i(A) = \{z \in \mathbb{C}, \ |z - a_{ii}| \le L_i\}.$$

$$G_C(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D'_i(A) \text{ et } D'_i(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \le C_i\}.$$

On désigne par $C_i(A)$ le cercle bordant le disque $D_i(A)$.

II.A -

II.A.1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4+3i & i & 2 & -1 \\ i & -1+i & 0 & 0 \\ 1+i & -i & 5+6i & 2i \\ 1 & -2i & 2i & -5-5i \end{pmatrix}.$$

Représenter dans le plan complexe $G_L(A)$ et $G_C(A)$.

II.A.2) On se propose de montrer l'inclusion $\sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)$.

a) Soit $M = (m)_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que le système linéaire $MZ = 0$ a une solution non nulle.

Montrer que

$$\exists p \in [1, 2, \ldots n] \qquad |m_{pp}| \le L_p.$$

b) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \sigma_A$. Utiliser II.A.2-a) et montrer que $\lambda \in G_L(A)$.

c) Conclure en justifiant l'inclusion $\sigma_A \subset G_C(A)$.

II.A.3) On suppose que $A \in M_n(\mathbb{C})$ a une valeur propre μ sur le bord de $G_L(A)$ [1] et soit x un vecteur propre associé à μ.

a) Montrer que si pour $k \in [1, 2, \ldots n]$ on a $|x_k| = \|x\|_\infty$, alors $\mu \in C_k(A)$.

b) On suppose de plus que $a_{ij} \neq 0 \forall (i, j)$. Montrer que $\mu \in \bigcap_{j=1}^{n} C_j(A)$.

---

1. Un point z appartient au bord de $G_L(A)$ si et seulement si $z \in G_L(A)$ et $|z - a_{ii}| \ge L_i \ i = 1, 2, \ldots n$.

II.A.4) Soit $p \in \mathbb{R}^n$. On note $p > 0$ lorsque $p = (p_1, p_2, \dots p_n)$ et $p_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots n$. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et D_p matrice diagonale avec $p > 0$. Déterminer $G_L(D^{-1}AD)$.

II.A.5)

a) Déduire de II.A.2) et II.A.4) l'inégalité

$$\rho(A) \le inf_{p>0}\left(\max_{i=1,2,\dots n}\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{ij}|\right).$$

b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ donné par II.A.5)-a est supérieur ou égal à $\frac{83}{3}$.

ii) Donner une valeur approchée de $\rho(A)$ (on pourra utiliser la calculatrice).

II.B - Applications

II.B.1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [1, 2, \dots n] \qquad |a_{ii}| > L_i.$$

On dit que A est strictement diagonale dominante (SDD).

a) Montrer que si A est SDD alors A est inversible.

b) Si A est SDD et si de plus $\forall i$ a_{ii} est réel et strictement négatif, montrer que pour tout $\lambda \in \sigma_A$, $Re(\lambda) < 0$.

c) Si A est une matrice réelle symétrique et SDD, énoncer une condition suffisante pour qu'elle soit définie, positive.

II.B.2) Soit B diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante $\kappa_\infty(B)$ telle que

$$\forall E \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E}, \exists \lambda_i \in \sigma_B \quad |\hat{\lambda} - \lambda_i| \le \kappa_\infty(B) N_\infty(E).$$

Partie III -

Cette partie est indépendante de la Partie II, à l'exception de III.B.3.

III.A - Préliminaire

$\mathbb{C}_n[X]$ est le $\mathbb{C}$- espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients complexes. Soit $t \to P_t$ une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$:

$$P_t(X) = X^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) X^{n-j}$$

où les n applications $t \to c_j(t)$ sont des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$.

On note Z_t l'ensemble des racines de P_t qui est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

III.A.1) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, 1] \qquad Z_t \subset D(0,R).$$

III.A.2) Soit t_0 fixé et $X_0 \in Z_{t_0}$. Montrer que la proposition (P) suivante est vraie

$$(P) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t |t - t_0| < \eta, \exists X_t \in Z_t, |X_t - X_0| < \varepsilon.$$

On pourra raisonner par l'absurde et écrire la proposition (non (P)).

III.B -

III.B.1) Exhiber une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ pour laquelle $D_1(A)$ (notation Partie II) ne contient pas de valeurs propres de A.

III.B.2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $G_L(A)$ défini dans II. On se propose de prouver la propriété suivante :

si $\forall j = 2, 3, \ldots n$, $D_1(A) \cap D_j(A) = \varnothing$, le disque $D_1(A)$ contient au moins une valeur propre de A.

On suppose donc que, $\forall j = 2, 3, \ldots, n$, $D_1(A) \cap D_j(A) = \varnothing$.

On écrit $A = D + B$ où D est diagonale et $B = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ij}$ pour $i \neq j$ et $b_{ii} = 0$.

On définit l'application : $t \in [0,1] \to A(t) = D + tB \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $G_L(A(t)) \subset G_L(A)$.

b) Soit $E = \{t \in [0,1] | \exists \lambda_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)\}$.

i) Montrer que $E \neq \varnothing$.

ii) Montrer la propriété $\forall t \in E,\ \exists \eta > 0$, $]t - \eta, t + \eta[\cap [0, 1] \subset E$.

iii) Soit $k \to (t_k)_{k = 1, 2, \ldots}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $a \in [0,1]$; montrer que $a \in E$.

On admettra que les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans $[0, 1]$ sont $\varnothing$ et $[0, 1]$.

iv) En déduire que $E = [0,1]$. Conclure.

III.B.3) Déduire de la Partie II et de la Partie III des propriétés du spectre de la matrice A définie dans la question II.A.1)

Partie IV - (indépendante de II et III)

Rappels : sur $M_n(\mathbb{C})$ on définit le produit hermitien et la norme associée ou norme de Frobenius N_2 :

Pour A et $B \in M_n(\mathbb{C})$, $<A, B> = Tr(AB^*)$ et

$$N_2(A) = \sqrt{<A, A>} = \sqrt{\sum_{i, j = 1, 2, \ldots n} |a_{ij}|^2} .$$

IV.A -

IV.A.1) Vérifier que N_2 est bien une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$.

Étant donnés A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, on définit leur H−produit noté $A \times_H B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$ par $(A \times_H B)_{ij} = a_{ij} b_{ij} (i = 1, 2, \ldots n \quad j = 1, 2, \ldots p)$.

IV.A.2)

a) Si A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, et si $D \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Delta \in M_p(\mathbb{C})$ sont des matrices diagonales, établir les égalités :

$$D(A \times_H B)\Delta = (DA\Delta) \times_H B = (DA) \times_H (B\Delta) .$$

Donner deux égalités semblables pour $D(A \times_H B)\Delta$.

b) Soient A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}^p$, établir l'égalité : $(AD_x {}^tB)_{ii} = [(A \times_H B)x]_i$

c) Si A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, $y \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^p$ montrer que

$$y^*(A \times_H B)x = Tr(D_y^* A D_x {}^tB) .$$

On pourra introduire la matrice colonne $e = {}^t(1, 1, \ldots 1)$, utiliser les questions a) et b) en remarquant que $D_y e = y$

d) En déduire que $x^*(A \times_H \bar{B})x = <D_x^* A D_x, B>$.

IV.B - Dans la suite on suppose $K = \mathbb{R}$, toutes les matrices sont à coefficients réels.

IV.B.1) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $T \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$. Que peut-on dire de T si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

IV.B.2) Soient A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $A \times_H B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Que peut-on dire si A et $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

IV.B.3) On se propose d'obtenir un encadrement des valeurs propres de $A \times_H B$ quand A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

a) On désigne par $\lambda_{\min}(A)$ (resp. $\lambda_{\min}(B)$) la plus petite valeur propre de A (resp. B) et par $\lambda_{\max}(A)$ (resp. $\lambda_{\max}(B)$) la plus grande.

Montrer que les matrices $B - \lambda_{\min}(B)I_n$ et $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b) Soit $\lambda(A \times_H B)$ une valeur propre de $(A \times_H B)$ et x un vecteur propre pour cette valeur propre ($\|x\|_2 = 1$). Évaluer ${}^tx(A \times_H B - \lambda(A \times_H B)I_n)x$ et en déduire

$$\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) \, . \, (\min_i \;\; a_{ii})$$

c) Montrer que $a_{ii} \geq \lambda_{\min}(A)$ et en déduire la minoration

$$\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \, .$$

d) Établir de même la majoration

$$\lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B) \, .$$

••• FIN •••
