# MATHÉMATIQUES II

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à $2$. Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$, dont les coefficients sont des entiers naturels. On note $a_{ij}$ le coefficient de $A$ appartenant à la $i$-ème ligne et à la $j$-ème colonne de $A$.

On suppose que $A$ est *symétrique* et que les coefficients de la diagonale principale de $A$ sont égaux à $1$.

On désigne par $M$ la matrice réelle, carrée, d'ordre $n$, de coefficient $m_{ij}$, définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} -\cos\left(\dfrac{\pi}{a_{ij}}\right) & \text{si} \quad a_{ij} \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad a_{ij} = 0 \end{cases}$$

On remarque que $M$ est symétrique et que les coefficients de sa diagonale principale valent $1$.

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base donnée de $E$.

Pour chaque entier $i$ compris entre $1$ et $n$, on désigne par $\sigma_i$ l'endomorphisme de $E$ caractérisé par :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \sigma_i(e_j) = e_j - 2m_{ij}e_i .$$

On note $\tau$ l'endomorphisme de $E$ donné par :

$$\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \circ \sigma_n .$$

où $\circ$ désigne la composition des applications.

On désigne par $S_i$ et $T$ les matrices associées aux endomorphismes $\sigma_i$ et $\tau$ dans la base $\mathcal{B}$ et par $I$ la matrice unité d'ordre $n$ associé à l'identité (notée $Id$).

## *Partie I - Étude du cas $n = 2$*

Dans cette partie I, on pose $n = 2$ et on pose :

$$a = a_{12} = a_{21} \text{ et } m = m_{12} = m_{21} .$$

**I.A -**

I.A.1) Expliciter $M$ en fonction de $m$ puis en fonction de $a$.

I.A.2) Donner en fonction de $m$ les matrices $S_1$, $S_2$ et $T$.

# Filière PC

**I.B -** On suppose dans cette question I.B que $a \in \{0,1\}$ et donc que $|m| = 1$.

I.B.1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\tau$

I.B.2) La matrice $T$ est-elle diagonalisable ? (Justifier la réponse).

I.B.3) Diagonaliser ou trigonaliser, si possible, la matrice $T$.

I.B.4) Montrer que $\tau$ est d'ordre infini (c'est à dire qu'il n'existe pas d'entier naturel strictement positif $k$ tel que $\tau^k = Id$, où $\tau^k = \tau \circ \tau \circ \ldots \tau$ désigne la puissance $k$-ième de $\tau$ pour la loi de composition).

**I.C -** On suppose dans cette question I.C, que $a$ est supérieur ou égal à $2$, et donc que $|m| < 1$.

On définit la forme bilinéaire $\phi$ sur $E \times E$ par :

$$\phi(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = xx' + yy' + m(xy' + yx'),$$ pour tous $x$, $x'$, $y$, $y'$ réels.

I.C.1) Montrer que $\phi$ est un produit scalaire.

Muni de ce produit scalaire, $E$ est un plan euclidien, que nous noterons aussi $E$.

I.C.2) Pour quelle valeur de $a$ la base $\mathscr{B}$ est-elle orthonormale ?

I.C.3) Montrer que les sous-espaces propres de $\sigma_1$ sont orthogonaux.

I.C.4) Montrer que $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont des symétries orthogonales en précisant par rapport à quelles droites vectorielles.

I.C.5) Montrer que $\tau$ est une rotation et déterminer une mesure en radians de l'angle de cette rotation, en supposant la base $\mathscr{B}$ directe.

I.C.6) En déduire que $\tau$ est d'ordre $a$, c'est-à-dire que $a$ est le plus petit entier strictement positif $k$ tel que $\tau^k = Id$.

**I.D -** On suppose dans cette question que $a \in \{2, 3, 4, 6\}$.

I.D.1) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, déterminer un réel $\mu_a$, $1 \le \mu_a < 2$, tel que les matrices associées à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ relativement à la base $(e_1, \mu_a e_2)$, aient tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

I.D.2) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, faire une figure soignée où l'on indiquera $e_1$ et $f_2 = \mu_a e_2$, ainsi que leurs images par $\sigma_1$ et $\sigma_2$. On représentera le plan euclidien $E$ de façon usuelle, c'est-à-dire que des vecteurs orthogonaux seront représentés par des flèches perpendiculaires et des vecteurs de même norme par des flèches de même longueur.

## Partie II - Étude du cas général

Dans cette partie $n$ désigne un entier quelconque supérieur ou égal à $2$.

**II.A -**

II.A.1)

a) Pour $i$ compris entre $1$ et $n$, calculer $\sigma_i(e_i)$.

b) Exprimer $\sigma_i^2 = \sigma_i \circ \sigma_i$ en fonction de l'identité.

c) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(\sigma_i - Id) \oplus \operatorname{Ker}(\sigma_i + Id)$.

II.A.2) On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, $\varepsilon_k = \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \sigma_{k-1}(e_k)$.

a) Montrer par récurrence sur $i < k$, que, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, on a :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \sigma_i(e_k) = e_k - 2 \sum_{1 \le j \le i} m_{jk} \varepsilon_j .$$

b) Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (\varepsilon_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de $E$.

II.A.3)

a) Exprimer $\tau(e_n)$ en fonction de $\varepsilon_n$.

b) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ on a :

$$\tau(e_k) = -\varepsilon_k - 2 \sum_{j = k+1}^{n} m_{jk} \varepsilon_j .$$

II.A.4) Soit $C$ la matrice carrée d'ordre $n$, triangulaire supérieure, dont les coefficients $c_{ij}$ sont donnés par :

$$c_{ij} = \begin{cases} 2m_{ij} & \text{si} \quad i < j \\ 0 & \text{si} \quad i \ge j \end{cases}$$

On notera ${}^tC$ la matrice transposée de la matrice $C$.

On désigne par $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$.

a) Exprimer $P^{-1}$ en fonction de $C$.

b) Montrer que :

$$T = -(I + C)^{-1}(I + {}^tC) .$$

c) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\det(\lambda I - T) = \det((\lambda + 1)I + \lambda C + {}^tC) .$$

**II.B -** Soient $i$ , $j$ vérifiant : $1 \le i \le n$ , $1 \le j \le n$ , $i \ne j$ ; on note $E_{ij}$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $e_i$ et $e_j$ .

II.B.1)

a) Montrer que $\dim E_{ij} = 2$ .

b) Montrer que $E_{ij}$ est stable par $\sigma_i$ , $\sigma_j$ , $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$ .

On note $\pi_{ij}$ et $\pi_{ji}$ les restrictions de $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$ à $E_{ij}$ .

c) Donner les matrices $\Pi_{ij}$ et $\Pi_{ji}$ associées à $\pi_{ij}$ et $\pi_{ji}$ relativement à la base $(e_i, e_j)$ de $E_{ij}$ .

d) Vérifier que $\Pi_{ij}$ et $\Pi_{ji}$ sont inverses l'une de l'autre. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

II.B.2)

a) Montrer que, si pour tous $i$ et $j$ on a $a_{ij} \in \{0,1\}$ , alors $\pi_{ij}$ et $\pi_{ji}$ sont d'ordre infini.

b) Quels sont les ordres de $\pi_{ij}$ et $\pi_{ji}$ lorsque $a_{ij} \ge 2$ ?

**II.C -** On suppose dans cette section que :

i) $n \ge 3$

ii) $a_{ij} = 2$ pour $1 < |i - j| < n - 1$

iii) $\{a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{(n-1)n}, a_{n1}\} \subset \{3, 4, 6\}$ .

On pose $\beta_n = 2m_{1n}$ et $\beta_i = 2m_{i(i+1)}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ .

On désigne par $p$ (resp. $q$ ) le nombre de couples $(i,j)$ , $i < j$ , tels que $a_{ij} = 4$ (resp. $a_{ij} = 6$ ).

II.C.1) Montrer que si $p$ et $q$ sont pairs, alors il existe un $n$ -uplet de réels $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ tel que les matrices de tous les $\sigma_k$ , pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ , relativement à la base $(\nu_1 e_1, \nu_2 e_2, \ldots, \nu_n e_n)$ , ont leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$ .

II.C.2) $\det(\lambda I - T)$ est un polynôme réel en $\lambda$ , de degré $n$ , que l'on écrira $\det(\lambda I - T) = \sum \alpha_k \lambda^k$ .

a) Justifier que $\alpha_n = 1$ et $\alpha_{n-1} = -\operatorname{tr} T$ , où $\operatorname{tr} T$ désigne la trace de $T$ .

b) Calculer, pour $n = 3$ , $\det(\lambda I - T)$ en fonction de $\lambda$ , $\beta_1$ , $\beta_2$ et $\beta_3$ .

c) Montrer que

$$\alpha_{n-1} = n - \sum_{1 \le i \le n} \beta_i^2 + (-1)^{n+1} \beta_1 \ldots \beta_n$$

(on pourra utiliser la question II.A.4 et démontrer la relation par récurrence sur $n$ ).

II.C.3)

a) Montrer que, s'il existe une base de $E$ dans laquelle toutes les matrices des $\sigma_k$ ont tous leurs coefficients entiers, alors la trace de $\tau$ est un entier.

b) Montrer que si $p$ est impair ou $q$ est impair, alors la trace de $\tau$ est irrationnelle.

c) Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle les matrices de tous les $\sigma_k$ ont tous leurs coefficients entiers si et seulement si $p$ et $q$ sont pairs.

## *Partie III - Un exemple dans le cas de $n = 3$*

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

**III.A -** Peut-on trouver une base de $E$ dans laquelle les matrices de $\sigma_1$ , $\sigma_2$ et $\sigma_3$ ont tous leurs coefficients entiers ?

**III.B -** On définit la forme bilinéaire $\Phi$ sur $E \times E$ par :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_{ij} x_i y_j$$

pour tous $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , $y_1$ , $y_2$ , $y_3$ réels.

III.B.1) Vérifier que $\Phi$ est un produit scalaire.

On considérera donc $E$ comme un espace vectoriel euclidien muni de ce produit scalaire.

III.B.2) Donner une équation cartésienne de l'orthogonal, pour $\Phi$ , du vecteur $ae_1 + be_2 + ce_3$ en fonction de $a$ , $b$ , $c$ .

**III.C -**

III.C.1) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer les sous-espaces $F_i = \mathrm{Ker}\,(\sigma_i - Id)$ et $G_i = \mathrm{Ker}\,(\sigma_i + Id)$.

III.C.2) En déduire que les $\sigma_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, sont des symétries orthogonales par rapport à des plans (ou réflexions) de $E$.

**III.D -** Montrer que les $\sigma_i \circ \sigma_j$, pour $1 \leq i$, $j \leq 3$, sont des rotations et les caractériser.

**III.E -**

III.E.1) Que peut-on dire de $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ ?

III.E.2) Déterminer la matrice $T$.

Déterminer un vecteur non nul $u$ de norme $1$ tel que $\tau(u) = -u$, puis une base directe de $E$, de premier vecteur $u$, orthonormale pour $\Phi$, $\mathcal{D} = (u, v, w)$.

III.E.3) Montrer que $\tau$ est la composée d'une rotation d'axe $\mathbb{R}u$, dont on précisera l'angle et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathbb{R}u)^\perp$.

Donner l'ordre de la matrice $T$, c'est-à-dire le plus petit entier $k > 0$ tel que $T^k = I$.

---

**••• FIN •••**

---