MATHÉMATIQUES I

Les polynômes intervenant dans ce problème sont des polynômes à une indéterminée X sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un polynôme pourra être indifférement noté P ou $P(X)$. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ sur $\mathbb{R}$, par F_n le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel), et par $[n]$ la partie entière d'un entier n.

Partie I -

I.A - ch désignant la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique, on rappelle que : $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, e^{n\alpha} = (\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{sh}\alpha)^n$.

I.A.1) Montrer que, $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{ch}n\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}(\mathrm{ch}\alpha)^{n-2k}(\mathrm{ch}^2\alpha-1)^k$.

I.A.2) En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un polynôme P_n tel que : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(n\alpha) = P_n(\mathrm{ch}\alpha)$.

Expliciter P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

I.B -

I.B.1) Démontrer que pour tout $n\geq 2$:

$$P_n(X)+P_{n-2}(X) = 2XP_{n-1}(X)$$

En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

I.B.2) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

I.B.3) Calculer le terme de plus haut degré de P_n. Déterminer la parité de P_n.

I.B.4) Démontrer que, si $|x|>1$ et $n\geq 1$, alors $|P_n(x)|>1$.

I.C - Dans cette question n est un entier naturel non nul fixé.

Démontrer que les racines de P_n sont toutes réelles, distinctes, et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$. Elles seront notées x_i, $0\leq i\leq n-1$ de telle sorte que la suite des x_i soit strictement décroissante. On déterminera la valeur de x_i.

Filière TSI

Partie II -

II.A -

II.A.1) Pour f élément de E, justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

II.A.2) Montrer que l'application Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi : (f, g) \mapsto (f|g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

définit un produit scalaire sur E. On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

II.B - Pour un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}, pour $n \geq 2$. En déduire la valeur de I_n.

II.C -

II.C.1) Calculer, pour m et n entiers naturels :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Que peut-on en déduire ?

II.C.2) Démontrer que

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^n P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0$$

lorsque n et m sont deux entiers naturels tels que $n < m$.

II.D - Soit h la fonction de E définie par $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculer la distance de h au sous-espace F_4, c'est-à-dire le nombre $d(h, F_4) = \inf_{P \in F_4} \|h - P\|$.

Partie III -

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul fixé. L'espace F_n est muni du produit scalaire défini au II.B.

III.A -

III.A.1) Soit $P \in F_n$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n, dont le polynôme dérivé est noté P'.

Calculer la dérivée de la fonction $x \to \sqrt{1-x^2}\ P'(x)$ et en déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in F_n$, que l'on exprimera en fonction de P' et P'', tel que

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ Q(x) = \sqrt{1-x^2}\ \frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}\ P'(x)] \qquad (1)$$

Montrer de plus que l'application φ définie dans la relation (1) par $\varphi(P) = Q$ est un endomorphisme de F_n.

III.A.2) Dans cette question seulement, on suppose $n \geq 2$. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots X^n)$ de F_n.

III.A.3) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

III.B -

III.B.1) Démontrer que φ est un endomorphisme symétrique de F_n. On pourra utiliser l'expression (1) de Q obtenue à la question III.A.1).

III.B.2) En utilisant la question II.C.2), démontrer que pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, il existe un réel λ_k tel que $\varphi(P_k) = \lambda_k P_k$. En utilisant le terme de plus haut degré de P_k, déterminer λ_k.

III.B.3) Retrouver et préciser le résultat obtenu à la question III.A.3).

III.C - Dans cette question, $n = 2$.

On pose, pour tout polynôme $P \in F_2$ et tout réel λ, $q_\lambda(P) = \lambda\|P\|^2 + (\varphi(P)|\ P)$.

III.C.1) Montrer que q_λ est une forme quadratique sur F_2.

III.C.2) Discuter selon la valeur de λ la nature de la quadrique définie par l'équation $q_\lambda(P) = 1$.

Partie IV -

IV.A - On désigne par x_0, x_1, x_2 les racines du polynôme P_3 et par A_0, A_1, A_2 trois nombres réels. Pour tout élément f de E, on définit le nombre $R(f)$ par :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f).$$

IV.A.1) Déterminer A_0, A_1, A_2 pour que $R(P) = 0$ pour toute fonction polynôme P élément de F_2.

IV.A.2) Démontrer qu'alors $R(P) = 0$ pour toute fonction polynôme P de F_5 : on pourra utiliser une division euclidienne par le polynôme P_3.

IV.B - Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{x^5}{\sqrt{-x^2 - 2x}} dx$$

et déduire de IV.A) sa valeur.

IV.C - Pour n fixé non nul, on désigne par $(x_j)_{0 \le j \le n-1}$ les racines de P_n (définies dans la partie I).

IV.C.1) Soit x un réel tel que $\sin x \neq 0$.

Exprimer la somme $\sum_{j=0}^{n-1} \cos((2j+1)x)$ à l'aide de $\sin(2nx)$ et de $\sin x$.

IV.C.2) En déduire pour un entier naturel k donné, $k \le 2n - 1$, la valeur de

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} P_k(x_j).$$

IV.C.3) Démontrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que, pour toute fonction polynôme P de F_{2n-1}, on ait

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} P(x_j).$$

••• FIN •••
