
MATHÉMATIQUES I

Notations et définitions

\mathbb{R}^2 est muni de la norme $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et L^1 l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ intégrables sur \mathbb{R}^+ . Si $f \in L^1$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f|$.

On note B l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornées sur \mathbb{R}^+ . Si $f \in B$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^+} |f|$.

Si $\alpha \in [1, +\infty[$, on convient que $0^\alpha = 0$; ainsi $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^\alpha$ est continue.

On pose, lorsque cela a un sens, $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$.

Si $\alpha \in [1, +\infty[$ et h est une fonction continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , on note $E_{\alpha,h}$ l'équation différentielle linéaire :

$$(E_{\alpha,h}) : y'' - \frac{1}{1+t^\alpha} y' + y = h$$

Par définition, une solution de $(E_{\alpha,h})$ est une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} de la variable t de classe \mathcal{C}^2 vérifiant $(E_{\alpha,h})$.

Pour une équation différentielle linéaire du second ordre (E) , de second membre h , on définit les propriétés de stabilité suivantes :

- on dira que (E) est **stable par rapport aux conditions initiales** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si f est une solution de (E) vérifiant $\|(f(0), f'(0))\| \leq \eta$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.
- on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens 1** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in L^1$ est tel que $\|h\|_1 \leq \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.
- on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens ∞** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in B$ est tel que $\|h\|_\infty \leq \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Filière PSI

De plus, dans le cas de l'équation $(E_{\alpha,0})$:

- on dira que $(E_{\alpha,0})$ est **stable par rapport au paramètre** si et seulement si pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
si $\beta \in [1, +\infty[$ vérifie $|\alpha - \beta| \leq \eta$, f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et g est solution de $(E_{\beta,0})$ avec $(f(0), f'(0)) = (g(0), g'(0)) = (a, b)$, alors $f - g \in B$ et $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Objectifs et dépendance des parties

L'objectif du problème est d'étudier le comportement des solutions de $(E_{\alpha,0})$ vers $+\infty$, ainsi que les différentes notions de stabilité.

La partie **I** étudie le cas de l'équation « limite à l'infini » $y'' + y = h$.

La partie **II**, indépendante de **I**, étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

La partie **III**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha > 1$, utilise des résultats de **II.A**, **II.C** et **I.5**.

La partie **IV**, qui étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{1,0})$, utilise **II.B**.

La partie **V**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha = 1$, utilise les parties **IV** et **II**.

Partie I - Étude de l'équation $y'' + y = h$

Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on note (F_h) l'équation différentielle $y'' + y = h$. Par définition, une solution de (F_h) est une fonction de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} vérifiant (F_h) .

I.A -

I.A.1) Donner l'ensemble des solutions de (F_0) .

I.A.2) Dans cette question uniquement, on prend pour $h : x \mapsto \cos(x)$.

Donner l'ensemble des solutions de (F_h) dans ce cas.

I.A.3) Dans cette question uniquement, on prend pour h la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R}^+ , définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } x \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Démontrer que h est continue sur \mathbb{R}^+ et déterminer l'ensemble des solutions de (F_h) .

I.B - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et f est la solution de (F_0) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (a, b)$, montrer que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \|(a, b)\|$.

I.C - Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, montrer que $f_0 : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left(\int_0^t h(u) \sin(t-u) du \right)$ est solution de (F_h) , et en déduire l'ensemble des solutions de (F_h) .

I.D - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

On donne $h \in L^1$.

Déterminer la solution f de (F_h) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$, montrer que $f \in B$, et $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\|h\|_1$.

En déduire que (F_h) est stable par rapport au second membre au sens 1.

I.E - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \delta \cos(t)$, et montrer que ses solutions sont non bornées, et plus précisément, ne sont pas en $o(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

En déduire la non stabilité de (F_0) par rapport au second membre au sens ∞ .

Partie II - Comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$

II.A - Démontrer l'existence de $I(\alpha)$, pour $\alpha > 1$, et sa continuité par rapport à α .

II.B - Relèvement angulaire

On donne $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^*$ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$.

II.B.1) Justifier l'existence d'une primitive A de $\frac{g'}{g}$, et montrer que ge^{-A} est constante.

II.B.2) En écrivant la fonction A sous la forme $A = B + iC$, où B et C sont des fonctions à valeurs réelles, justifier qu'il existe $r \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tels que $g = re^{i\theta}$.

II.C - Comportement à l'infini pour $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$ et f une solution non nulle de $(E_{\alpha,0})$. On note $q : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$.

II.C.1) En appliquant II.B, montrer qu'il existe $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

telles que $f = r \cos(\theta)$ et $f' = r \sin(\theta)$.
Exprimer r en fonction de f et f' .

Les fonctions r et θ sont fixées ainsi pour la suite de la partie.

II.C.2) Démontrer que $\theta' = -1 + q \sin(\theta) \cos(\theta)$. (1)

II.C.3) Démontrer que $r' = qr \sin^2(\theta)$. (2)

II.C.4) Démontrer que r a une limite strictement positive en $+\infty$ vérifiant
 $\lim_{+\infty} r \leq r(0) \exp(I(\alpha))$.

Démontrer que f et f' sont bornées par $\|(f(0), f'(0))\| \exp(I(\alpha))$.

II.C.5) Démontrer que $\theta(t) + t$ tend vers une limite réelle quand $t \rightarrow +\infty$.

II.C.6) Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) - a \cos(t + b) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

II.C.7) Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie III - Étude de la stabilité pour $\alpha > 1$

Dans toute la partie, $\alpha > 1$, et (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de $(E_{\alpha,0})$.

$w = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ est le wronskien associé.

On pensera à utiliser les résultats de II.

III.A - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport aux conditions initiales.

III.B - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

III.B.1) Déterminer une équation différentielle vérifiée par w , et montrer qu'il existe a, b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < a \leq |w(x)| \leq b$.

III.B.2) Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, montrer que les solutions de $(E_{\alpha,h})$ sont les fonctions du type $f = -C_1 f_1 + C_2 f_2$, où C_1 est une primitive de $\frac{h f_2}{w}$ et C_2 une primitive de $\frac{h f_1}{w}$.

III.B.3) Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes requises sur C_1 et C_2 dans la question précédente pour avoir $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$?

III.B.4) Démontrer l'existence de $C \in \mathbb{R}^+$ telle que : pour tout $h \in L^1$, la solution f de $(E_{\alpha, h})$ vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$ est dans B , et $\|f\|_\infty \leq C\|h\|_1$. En déduire que $(E_{\alpha, 0})$ est stable par rapport au second membre au sens 1.

III.C - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit g une solution de $y'' + y = \lambda \cos(t)$.

Soit f la solution sur \mathbb{R}^+ de $y'' - \frac{1}{1+t^\alpha}y' + y = \lambda \cos(t)$ telle que $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$. On pose $\Phi = f - g$.

III.C.1) Démontrer que Φ est solution de $(E_{\alpha, h})$, pour une fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

III.C.2) Démontrer que $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ implique que $\int_0^t |h| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t)$.

III.C.3) Utilisant la résolution de $(E_{\alpha, h})$ vue en III.B, montrer que $\Phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t)$.

III.C.4) Démontrer que $(E_{\alpha, 0})$ n'est pas stable par rapport au second membre au sens ∞ .

III.D - Stabilité par rapport au paramètre

On fixe pour la suite de la question $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $\beta \in]1, +\infty[$.

Soit f la solution de $(E_{\alpha, 0})$ vérifiant $(f(0), f'(0)) = (a, b)$, g la solution de $(E_{\beta, 0})$ vérifiant $(g(0), g'(0)) = (a, b)$.

On pose $\Phi = f - g$.

Si $\lambda > 1$, on pose $J(\lambda) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\lambda} dt$ et $K(\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\lambda} dt$.

Comme pour I , les fonctions J et K sont bien définies et continues sur $]1, +\infty[$ (on ne demande pas de le montrer).

III.D.1) Démontrer que Φ est une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha, h})$ avec

$$h : t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha} \right) g'(t)$$

III.D.2) Démontrer que $h \in L^1$ et

$$\|h\|_1 \leq \| (a, b) \| e^{J(\beta)} \left(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \right).$$

III.D.3) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV - Étude du comportement vers $+\infty$ pour $\alpha = 1$

f est une solution non nulle de $(E_{1,0})$.

On pose $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t+1}}$.

IV.A - Établir que pour tout $t \geq 0$, $g''(t) + \left(1 - \frac{3}{4(t+1)^2}\right)g(t) = 0$.

IV.B - Démontrer qu'il existe $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $g = \rho \cos(\beta)$ et $g' = \rho \sin(\beta)$.

IV.C - Déterminer une équation différentielle vérifiée par β et montrer que $\beta(x) + x$ tend vers une limite réelle lorsque $x \rightarrow +\infty$.

IV.D - Déterminer une équation différentielle vérifiée par ρ , et démontrer que ρ tend vers une limite réelle $a > 0$ en $+\infty$.

IV.E - Démontrer qu'il existe un réel b tel que $f(t) - a\sqrt{t} \cos(t+b) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{t})$, où a est le réel défini ci-dessus.

IV.F - Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie V - Étude de la stabilité pour $\alpha = 1$

V.A - Démontrer que $(E_{1,0})$ n'est pas stable par rapport aux conditions initiales et au paramètre.

V.B - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f_\lambda : x \mapsto \lambda x \sin(x)$, calculer $f_\lambda''(x) - \frac{1}{1+x} f_\lambda'(x) + f_\lambda(x)$.

Qu'en déduire concernant la stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens ∞ ?

••• FIN •••
