MATHÉMATIQUES I

L'épreuve est constituée de deux parties totalement indépendantes.

Partie I -

Dans cette partie, H est un réel fixé dans l'intervalle $]0, 2]$.

On désigne par I l'intervalle $]-1/2, 1/2[$ et par I^* cet intervalle privé de 0.

Pour tout $t \in I^*$, on pose $N(t) = E\left[-\frac{\ln|t|}{\ln 2}\right]$ où $E[x]$ désigne la partie entière de x.

I.A -

I.A.1) Rappeler, sans démonstration, ce que sont :

- l'ensemble J des réels r pour lesquels la série de terme général r^n converge ;
- la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ pour $r \in J$ et celle de $\sum_{n=k}^{+\infty} r^n$ pour $r \in J$ et $k \in \mathbb{N}$;
- pour $r \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sum_{n=0}^{p} r^n$.

I.A.2) Montrer que la série de terme général $2^{-nH}\cos(2^n x)$ est absolument convergente quel que soit le réel x.

Le but de cette partie est d'étudier, suivant les valeurs de H, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-nH}\cos(2^n x).$$

Pour k entier, avec $k \geq 1$, on notera

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} 2^{-nH}\cos(2^n x) \quad \text{et} \quad T_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} 2^{-nH}\cos(2^n x).$$

I.A.3) Montrer que f est de période 2π. Déterminer un majorant $M_1(H)$ de la fonction $|f|$.

Filière TSI

I.A.4) Montrer que, pour tout $t \in I^*$, on a :

$$N(t) \geq 1 \quad ; \quad 2^{-N(t)-1} \leq |t| \leq 2^{-N(t)} \quad \text{et} \quad 2^{-N(t)} \leq 2|t| .$$

I.A.5) Soit a et h deux réels. On pose $z = e^{ia}(e^{ih} - 1 - ih)$ où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

a) Montrer que $|z| \leq h^2 e^{|h|}$ (on pourra utiliser l'expression de e^{ih} comme somme d'une série entière).

b) En considérant la partie réelle de z, montrer que

$$|\cos(a+h) - \cos a + h \sin a| \leq h^2 e^{|h|} .$$

I.A.6) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in I^*$, on a :

$$\left| S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right| \leq e \cdot t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)}$$

(on pourra utiliser la question précédente et l'inégalité $e^{|2^n t|} \leq e$, que l'on justifiera).

Lorsque $H < 2$, trouver une constante $C_1(H)$ telle que, pour tout $t \in I^*$, on ait

$$e \cdot t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \leq C_1(H) \left| t^H \right| .$$

Lorsque $H = 2$, trouver une constante K telle que, pour tout $t \in I^*$, on ait

$$e \cdot t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \leq K t^2 \ln \frac{1}{|t|} .$$

I.A.7) Montrer qu'il existe une constante $C_2(H)$ telle que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t \in I^*$, $|T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)| \leq C_2(H)|t|^H$ (on pourra utiliser l'inégalité $|\cos a - \cos b| \leq 2$, vraie pour tous réels a et b).

On considère maintenant la fonction g définie pour x réel par :

$$g(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) .$$

I.B - On prend $H \in]1, 2]$.

I.B.1) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer un majorant $M_2(H)$ de la fonction $|g|$.

I.B.2) Pour x fixé dans $\mathbb{R}$ et $t \in I^*$, on pose

$$l(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x).$$

Montrer que $l(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 (on pourra utiliser I.A.6 et I.A.7).

I.B.3) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f' = g$. Par la suite, on admet que g est continue sur $\mathbb{R}$.

I.B.4)

a) Calculer les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la série de Fourier de la fonction f. On admettra que

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-pH} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x) \cos nx \, \mathrm{d}x .$$

b) Pour un réel x fixé, écrire la somme de Fourier de f de rang 2^n et montrer qu'elle coïncide avec une somme partielle de la série numérique qui définit $f(x)$.

c) Les propriétés de f permettent-elles de prévoir que $f(x)$ est la limite, quand n tend vers $+\infty$, des sommes de Fourier de f de rang 2^n ?

I.B.5)

a) Utiliser I.B.4 pour calculer $\int_0^{2\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t$ en fonction de H.

b) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| \mathrm{d}t \geq \frac{\pi}{1 + 2^{-H}}$$

I.C - On prend $H = 2$.

I.C.1) Trouver la valeur exacte de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x = \pi/4$ et $3\pi/4$.

I.C.2) On pose

$$\varphi(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{8}\sin(8x) .$$

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur minimale de $\varphi(x)$ pour

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

b) En revenant à la définition de g, donner une majoration de $|g(x)+\varphi(x)|$.

c) En déduire que g est strictement négative sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

I.C.3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

I.D - On prend $H \in]0, 1[$. On veut montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Soit $t \in]0, \frac{1}{2}[$.

I.D.1) Vérifier, que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{4}$.

I.D.2) Montrer qu'il existe une constante $C_3(H) > 0$ telle que

$$|S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t)| \geq C_3(H)(t^H - t^2 \cdot 2^{2-H}).$$

I.D.3) Vérifier que

$$T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t) \geq 0.$$

I.D.4) En déduire que

$\frac{f(0)-f(t)}{t}$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 0, t > 0$.

Partie II -

II.A -

Soit Q un polynôme du second degré en x, y, défini par $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + a'x + b'y + c'$, à coefficients réels tels que $b^2 - 4ac \neq 0$. On définit une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = \exp\{Q(x, y)\}$.

II.A.1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f. Montrer qu'elles s'annulent aux mêmes points que celles de Q.

II.A.2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f. Comparer ces dérivées partielles d'ordre 2 de Q en un point où les dérivées partielles d'ordre 1 de Q sont nulles.

II.A.3) Utiliser le développement de Taylor-Young pour montrer que les extremums locaux de f sont situés aux mêmes points et sont de même nature que ceux de Q.

II.B -

Soit Q_1 et Q_2 deux polynômes du second degré en x, y, définis par $Q_1(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}y - \frac{7}{2}$ et $Q_2(x, y) = x^2 + \frac{1}{10}y^2 - \frac{19}{10}x + \frac{1}{10}y + \frac{3}{10}$.

On définit deux fonctions f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f_1(x, y) = \exp\{Q_1(x, y)\}$ et $f_2(x, y) = 2\exp\{Q_2(x, y)\}$.

II.B.1) f_1 admet-elle des extremums ? Si oui, quelle en est la nature ?

II.B.2) Même question pour f_2.

II.B.3) Montrer que, sur la droite $y = 2x$ les fonctions Q_1 et Q_2 prennent des valeurs égales en deux points que l'on déterminera.

II.C - On considère la transformation du plan définie par

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

II.C.1) Montrer que F admet un point fixe en $(1, 2)$, c'est-à-dire que

$$F(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

II.C.2) Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f_1(x, y)$ au point $(1, 2)$. Même question pour f_2.

II.C.3) Déterminer la matrice jacobienne J de la transformation F en $(1, 2)$. Cette matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

••• FIN •••
