MATHÉMATIQUES I

Partie I - Calculs préliminaires

Dans tout ce problème a et v désignent deux nombres réels, a est strictement positif.

I.A - Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$\varphi(x) = \dfrac{(\sin(x))^2}{x^2}$ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$.

On le note encore φ.

Montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puis que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.B -

I.B.1) Soit b un réel tel que $0 < a < b$. Montrer que l'on a :

$$\int_a^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos(y)}{y}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(y)}{y^2}\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos(y)}{y}\right]_a^b + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \varphi(x)\mathrm{d}x \ .$$

I.B.2) En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ ainsi que l'égalité :

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x \ .$$

I.C - Si $[\alpha,\beta]$ est un segment réel et si h est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{C}$ montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_\alpha^\beta h(t)e^{itv}\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque v tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

I.D -

I.D.1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et h_n la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$h_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \ .$$

Montrer que h_n admet un prolongement par continuité en 0.

En déduire la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$.

I.D.2) Calculer I_0 puis, en calculant $I_{n+1} - I_n$, en déduire I_n.

Filière TSI

I.D.3) Soit h l'application définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$h(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}.$$

a) Donner un développement limité de h d'ordre 1 en 0.

b) En déduire que h admet un prolongement continu et dérivable à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On le note encore h. Préciser $h(0)$ et $h'(0)$.

c) Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) En déduire que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t)h(t)\mathrm{d}t \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

e) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Montrer que cette intégrale est convergente puis que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

En déduire les valeurs de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ et de $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$.

I.E -

I.E.1) On considère à nouveau la fonction φ définie dans la première question et on pose, pour $u \in \mathbb{R}$, $\psi_v(u) = a\varphi(a(u-v))$.

On a ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } v \neq u, \ \psi_v(u) = \dfrac{[\sin(a(v-u))]^2}{a(v-u)^2} \\ \text{et } \psi_v(v) = a\varphi(0) \end{cases}$$

Montrer que ψ_v est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.E.2) Montrer que, lorsque $v \to +\infty$, $\int_0^{+\infty} \psi_v(u)\mathrm{d}u \to \pi$.

I.F - Montrer que, pour tout nombre réel u,

$$\int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) e^{it(u-v)}\mathrm{d}t = 2\psi_v(u).$$

I.G -

I.G.1) Montrer que, pour tout réel $\sigma \geq 1$, $u \mapsto \psi_v(u)e^{(1-\sigma)u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

I.G.2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \psi_v(u)e^{(1-\sigma)u}\mathrm{d}u$ tend vers $\int_0^{+\infty} \psi_v(u)\mathrm{d}u$ lorsque σ tend vers 1 par valeurs supérieures.

Partie II -

Dans cette partie :

- on désigne par $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tels que :

  ($\boldsymbol{P_1}$) la série $\sum \beta_n n^{-s}$ converge pour tout nombre complexe s vérifiant $\mathcal{Re}(s) > 1$ où $\mathcal{Re}(s)$ désigne la partie réelle de s ;

- on désigne par B une fonction continue et croissante de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

  ($\boldsymbol{P_2}$) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B(n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$;

- on pose, pour tout réel $x \geq 1$ et tout complexe s vérifiant $\mathcal{Re}(s) > 0$,

  $F_s(x) = \left(\dfrac{B(x)}{x} - 1\right)x^{-s}$.

On suppose que

($\boldsymbol{P_3}$) F_s est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- On définit ainsi pour tout complexe s vérifiant $\mathcal{Re}(s) > 0$, $G(s) = \int_1^{+\infty} F_s(x)\mathrm{d}x$.

On suppose que

($\boldsymbol{P_4}$) la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (\sigma, t) \mapsto G(\sigma + it) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on considère un nombre réel σ strictement supérieur à 1.

II.A - On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} B(k)(k^{-\sigma} - (k+1)^{-\sigma}).$$

II.A.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

II.A.2) On a $B(k) - B(k-1) = \beta_k$. Exprimer u_n en fonction de $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k k^{-\sigma}$ et de $B(n-1)n^{-\sigma}$ et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

II.A.3) En déduire la convergence de la suite $(B(n)n^{-\sigma})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

II.A.4) En utilisant la croissance de B en déduire que la fonction $x \mapsto B(x)x^{-\sigma}$ admet une limite finie en $+\infty$.

II.B -

II.B.1) Transformer l'intégrale définissant G par le changement de variable $x = e^u$.

On pose, pour tout v appartenant à $[0, +\infty[$,

$$H(a, v) = \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it)\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) e^{itv} \mathrm{d}t .$$

II.B.2) Montrer que :

$$|H(a, v)| \le \int_{-2a}^{2a} \left(\int_0^{+\infty} \left|(e^{-u} B(e^u) - 1)e^{-(\sigma - 1)u}\right| \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}t .$$

En déduire l'existence d'une constante K telle que : $\forall v \in]0, +\infty[$, $|H(a, v)| \le 4aK$.

II.B.3) En inversant l'ordre des intégrations dans la définition de $H(a, v)$ (on admettra que l'inversion est possible), montrer que :

$$H(a, v) = 2\int_0^{+\infty} (e^{-u} B(e^u) - 1)e^{(1-\sigma)u} \psi_v(u) \mathrm{d}u .$$

II.C -

II.C.1) Montrer que, pour tout $\sigma > 1$, la fonction $u \mapsto e^{-\sigma u} B(e^u)\psi_v(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Indication : on pourra utiliser la question II.A.4.

II.C.2) Montrer que, pour tout $\sigma_0 > 1$, la fonction

$$\sigma \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u} B(e^u)\psi_v(u) \mathrm{d}u \text{ est continue sur }]\sigma_0, +\infty[.$$

Elle est donc continue sur $]1, +\infty[$ et on admettra de plus que :

$$\lim_{\substack{\sigma \to 1 \\ \sigma > 1}} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u} B(e^u)\psi_v(u) \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u} B(e^u)\psi_v(u) \mathrm{d}u .$$

II.D - Montrer que :

$$\lim_{\substack{\sigma \to 1 \\ \sigma > 1}} \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it)\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right)e^{itv}\,\mathrm{d}t = \int_{-2a}^{2a} G(1 + it)\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right)e^{itv}\,\mathrm{d}t .$$

II.E - Montrer que :

$$\int_{-2a}^{2a} G(1 + it)\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right)e^{itv}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{+\infty} \psi_v(u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-u} B(e^u)\psi_v(u)\,\mathrm{d}u .$$

II.F -

II.F.1) En admettant que le résultat de la question I.C reste valable si on suppose seulement la continuité de la fonction h, montrer que :

$$\lim_{v \to +\infty} \int_{-2a}^{2a} G(1 + it)\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right)e^{itv}\,\mathrm{d}t = 0 .$$

II.F.2) En déduire : $\lim_{v \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} B(e^u)\psi_v(u)\,\mathrm{d}u = \pi$.

••• FIN •••
