Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES I **Filière** TSI

Préliminaires

Un *système différentiel autonome* de dimension 2 est un système différentiel qui se présente sous la forme

$$\begin{cases} x' = \phi(x,y) \\ y' = \psi(x,y) \end{cases} \qquad (S_1)$$

où ϕ et ψ sont des fonctions de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Les fonctions inconnues x et y sont des fonctions de la variable t définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On utilise aussi la notation matricielle

$$X' = F(X)$$

où le vecteur X représente le couple (x,y) et où $F = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1.

Un *point critique* de ce système est un point (x_0, y_0) de Ω tel que

$$\phi(x_0, y_0) = \psi(x_0, y_0) = 0.$$

Étant donné un intervalle I borné ou non, le couple de fonctions (x,y) est une solution de (S_1) sur I si les applications $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et vérifient $x'(t) = \phi(x(t), y(t))$, $y'(t) = \psi(x(t), y(t))$ pour tout $t \in I$. Une *valeur initiale* est un triplet (x_0, y_0, t_0) de nombres réels. Une solution (x,y) vérifie cette valeur initiale si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Si (x,y) est une solution de (S_1) sur I, l'ensemble des points $(x(t), y(t))$, $t \in I$, est la *trajectoire* Γ de cette solution. Cette trajectoire est *maximale* si pour toute trajectoire Γ' ayant un point commun avec Γ, on a $\Gamma' \subset \Gamma$.

On s'intéresse au comportement des trajectoires de certains systèmes autonomes. On rappelle le résultat suivant, qui est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Tout point (x_0, y_0) de Ω appartient à une trajectoire maximale unique.

Remarque sur la rédaction Il sera demandé de tracer des courbes. Il est entendu qu'il faut le faire dans un repère cartésien, mais que la précision souhaitée n'est pas celle d'un dessin industriel. Il suffira de tracer à main levée dans un carré de moins de 12 cm de côté, en s'attachant à bien mettre en valeur les éléments mathématiques de la figure, selon le cas : points particuliers, tangentes etc. Les courbes tracées point par point ne seront pas prises en compte.

Notation Dans le plan euclidien orienté, on note R_θ la matrice de la rotation de centre 0, d'angle θ.

Partie I - Système différentiel autonome

Les résultats obtenus dans cette partie seront utilisés par la suite.

I.A -

I.A.1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Donner la solution générale de l'équation différentielle $x' = \lambda x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Donner la solution particulière vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

I.A.2) Soit α, β deux réels. Donner la solution générale réelle de l'équation différentielle

$$x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$$

dans les deux cas : $\beta \neq 0$, $\beta = 0$.

I.B - On considère l'équation différentielle autonome $x' = x(1-x)$.

I.B.1) Déterminer les solutions constantes.

I.B.2) Trouver une primitive de $\dfrac{x'}{x(1-x)}$.

I.B.3)

a) Montrer que les solutions qui ne sont pas constantes peuvent se mettre sous la forme

$$x(t) = \frac{1}{1 + C\,\mathrm{e}^{-t}}$$

où C est une constante non nulle.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la solution vérifiant la condition initiale $x(0) = \dfrac{1}{2}$.

- version du 28 février 2008 14h32

Partie II - Cas linéaire

On va étudier le système linéaire :

$$X' = AX \qquad (S_2)$$

où A est une matrice 2×2, ayant deux valeurs propres distinctes, réelles ou complexes, et non nulles. On admet que la solution générale du système (S_2) est de la forme

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t),$$

où X_1 et X_2 sont deux solutions telles que le déterminant, dans une base orthormale directe, de la matrice $\Phi(t) = (X_1, X_2)$ ne s'annule jamais.

II.A - On considère le cas où A est diagonale, donc de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

II.A.1) Utiliser I.A.1) pour obtenir la solution générale de $X' = AX$, sous la forme $X(t) = \Phi_1(t)C$ où $\Phi_1(t)$ est une matrice 2×2 et $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur dont les composantes sont des constantes arbitraires.

II.A.2) Déterminer les trajectoires maximales passant par $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$.

II.A.3) Soit $(x_0, y_0, 0)$ une valeur initiale avec $x_0 \neq 0$. Démontrer que la solution a une trajectoire dont l'équation cartésienne est de la forme

$$y = Cx^\alpha.$$

On déterminera C en fonction de x_0, y_0, et α en fonction de λ_1, λ_2.

II.A.4) Décrire les trajectoires maximales passant par le point $(1,1)$ dans chacun des cas suivants :

(i) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$;

(ii) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$;

(iii) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$,

et les tracer dans un même repère.

II.B - Maintenant A n'est plus nécessairement diagonale, mais elle a toujours des valeurs propres réelles λ_1, λ_2. Soit D la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

II.B.1) Montrer qu'il existe une matrice inversible P qui s'écrit en colonne : $P = (X_1, X_2)$ telle que si $X(t) = PY(t)$, le nouveau vecteur Y vérifie $Y' = DY$.

II.B.2) En déduire que la solution générale de $X' = AX$ peut se mettre sous la forme $X(t) = \Phi_2(t)C$ où $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur de constantes arbitraires et $\Phi_2(t)$ une matrice 2×2 dont le déterminant ne s'annule pas.

II.B.3) Donner la condition sur les λ_i pour que toutes les solutions tendent vers $(0,0)$ lorsque $t \to +\infty$.

II.B.4) On étudie le système différentiel : $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$.

a) Calculer D et P (notations reprises du II.B.1)). Vérifier que pour P on peut prendre une matrice de rotation R_θ où θ est un angle à déterminer. Que vaut R_θ^{-1} ?

b) Trouver la solution générale.

c) On donne la valeur initiale $(1,0,0)$. Calculer la solution $X(t)$ du système ci-dessus, et la solution $Y(t)$ du système $Y' = DY$.

d) Tracer la trajectoire maximale de $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$ passant par le point $(1,0)$ (on pourra d'abord tracer celle correspondant à $Y(t)$).

II.B.5) Mêmes questions avec le système

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X.$$

II.C - On considère le cas où $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, où α et β sont deux réels, $\beta \neq 0$.

II.C.1) Calculer les valeurs propres de A.

II.C.2) Montrer que si $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est solution, alors x et y sont toutes deux solutions de l'équation

$$x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0.$$

En déduire que la solution générale de $X' = AX$ est de la forme $X(t) = e^{\alpha t} R_{\beta t} C$, où C est un vecteur de constantes arbitraires.

II.C.3) Donner la condition sur α, β pour que toutes les solutions tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

II.C.4) On étudie le système

$$X' = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} X.$$

a) Trouver la solution vérifiant la valeur initiale $(1,0,0)$. Soit Γ la trajectoire correspondante.

b) Déterminer l'équation polaire de Γ, sous la forme $r = f(\theta)$.

c) Tracer Γ.

Partie III - Un cas non linéaire

On va étudier le cas non linéaire

$$X' = F(X) \qquad (S_3)$$

où $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x - y^2 \end{pmatrix}$.

III.A -

III.A.1) Calculer la matrice jacobienne $J(x, y)$ de F et donner le développement de Taylor de F au voisinage d'un point quelconque (x_0, y_0).

III.A.2) Trouver les points critiques de (S_3). Montrer que chaque point critique constitue une trajectoire maximale.

III.A.3) Décrire la trajectoire maximale passant par $(0.5, 0.5)$ et celle passant par $(2, 2)$ (on pourra utiliser la question I.B).

III.A.4) Trouver l'ensemble des points (x, y) où la tangente à la trajectoire passant par (x, y) est

a) horizontale ;

b) verticale ;

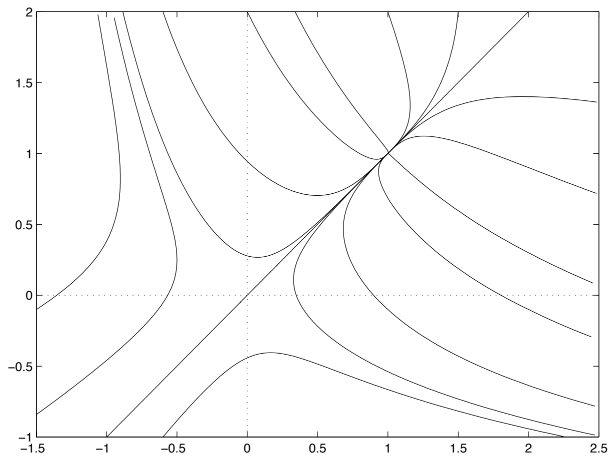
c) de coefficient directeur 1 ;

d) de coefficient directeur -1.

III.B - On admet que pour un tel système différentiel, l'allure des trajectoires au voisinage de chaque point critique (x_0, y_0) est la même que pour le système dit *linéarisé* $X' = J(x_0, y_0)X$ au voisinage de 0.

La figure ci-dessous représente quelques trajectoires de (S_3).

En utilisant la partie II, justifier l'allure de ces courbes au voisinage des points fixes.



III.C - La figure précédente a été tracée en appliquant la *méthode d'Euler*. C'est un algorithme qui permet l'approximation d'une solution $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ au moyen d'une suite $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, construite par récurrence de la manière suivante :

- On fixe un *pas* $\varepsilon > 0$, et on pose $t_n = t_0 + n\,\varepsilon$.
- Étant donné la valeur initiale (x_0, y_0, t_0), on pose $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
- Le vecteur suivant X_1 est solution de l'équation $X'(t_0) = \dfrac{1}{\varepsilon}(X - X_0)$, d'inconnue X.
- Si X_n est calculé, on obtient X_{n+1} comme solution de $X'(t_n) = \dfrac{1}{\varepsilon}(X - X_n)$.

Une interpolation des points X_n permet de tracer une courbe qui constitue l'approximation cherchée de la trajectoire.

III.C.1) Soit H la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} x + \varepsilon(y - x^2) \\ y + \varepsilon(x - y^2) \end{pmatrix}.$$

Montrer que la méthode d'Euler consiste à construire la suite (X_n) définie par

$$X_{n+1} = H(X_n).$$

On appelle aussi (X_n) une *orbite* de H.

III.C.2) Déterminer les *points fixes* de H, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$H(X) = X.$$

III.D - On veut montrer que si (x_0, y_0) est pris dans un voisinage de $(1,1)$, toutes les orbites de H convergent vers $(1,1)$. On prend ε dans $]0,1]$ et on pose $\rho = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

III.D.1) Commençons par le vérifier pour toutes les orbites partant d'un point de la première bissectrice. Soit $g(t) = (1-\varepsilon)t - \varepsilon t^2$.

a) Montrer que si $|t| \leq 0.5$, alors $|g(t)| \leq \rho|t|$.

b) Soit t_0 tel que $|t_0| \leq 0.5$. Soit (t_n) la suite définie par récurrence en posant $t_{n+1} = g(t_n)$. Montrer que $t_n \to 0$.

c) En déduire que si $x_0 = y_0$ et $|1 - x_0| < 0.5$, alors $x_n \to 1$ et $y_n \to 1$.

III.D.2) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on appelle *norme* de X le réel $\|X\| = \max\{|x|, |y|\}$.

a) Vérifier qu'une suite de vecteurs (X_n) converge vers une limite X^* si, et seulement si, la norme $\|X_n - X^*\|$ tend vers 0.

b) Pour chaque vecteur $T = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ on définit

$$G(T) = \begin{pmatrix} u + \varepsilon(v - 2u - u^2) \\ v + \varepsilon(u - 2v - v^2) \end{pmatrix}.$$

Montrer que si $\|T\| \leq 0.5$, alors $\|G(T)\| \leq \rho\|T\|$.

c) Partant de T_0, $\|T\| \leq 0.5$, on définit la suite (T_n) comme l'orbite de G, c'est-à-dire $T_{n+1} = G(T_n)$. Montrer que $\|T_n\| \to 0$.

d) En déduire que si $\|X_0 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\| \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors $X_n \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

••• FIN •••
