Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES II **Filière** TSI

Définitions et notations

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On utilise l'isomorphisme canonique entre $\mathbb{R}^2$ et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes réelles d'ordre 2 ; ainsi, à tout vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on associe la matrice colonne notée $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On suppose que $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle\, , \,\rangle$. On identifie $\mathbb{R}$ et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 1, et on peut ainsi écrire le produit scalaire de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$ sous la forme : $\langle u, v\rangle = {}^tUV$, où $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

- Dans E, on note 0_E la matrice nulle, et I_2 la matrice unité.
- On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles orthogonales d'ordre 2.
- On note $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre 2, et $\mathscr{A}_2$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles d'ordre 2.
- Pour toute matrice A de E, on note $tr(A)$ la trace de A, et $det(A)$ le déterminant de A.
- Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un repère orthonormal direct :
$$\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$$
- Tout plan affine sera muni d'un repère orthonormal de la forme :
$$\mathscr{R}_1 = \left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$$
- On appelle surface de $\mathbb{R}^3$ tout ensemble de points défini par une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$, où f est une application de classe C^2 d'une partie Ω de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On note Σ l'ensemble des surfaces de $\mathbb{R}^3$.

Toutes les questions précédées de la mention « Application » peuvent être traitées en admettant éventuellement les résultats qui les précèdent.

- version du 3 mars 2008 11h22

Partie I - Étude de deux applications

On considère l'application ϕ de E dans Σ, qui à toute matrice A, associe la surface d'équation cartésienne : $z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

I.A - Exemples :

I.A.1) Déterminer l'image par ϕ de la matrice nulle, et préciser sa nature.

I.A.2) Déterminer l'image par ϕ de la matrice unité I_2, et préciser sa nature.

I.A.3) Déterminer $\phi(A)$, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, et préciser sa nature.

I.B -

I.B.1) Montrer que E est somme directe de $\mathscr{S}_2$ et de $\mathscr{A}_2$: $E = \mathscr{S}_2 \oplus \mathscr{A}_2$

I.B.2) On note X= $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Soit A un élément de E. Montrer que :

$$(\text{pour tout X de } \mathbb{R}^2,\ {}^tXAX = 0) \iff \text{A antisymétrique.}$$

I.B.3) Montrer que ϕ n'est pas injective.

I.B.4) Montrer que, pour toute matrice A de E, il existe une et une seule matrice A' symétrique telle que :

$$\phi(A) = \phi(A').$$

I.C - On note p l'application qui à toute matrice A de E, associe la matrice A' définie en I.B.4 dans E.

On définit l'application $<, >$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\text{Pour tout couple } (A, B) \text{ de } E \times E,\ < A, B >= tr({}^tAB)$$

I.C.1) Montrer que $<, >$ est un produit scalaire sur E.

I.C.2) Montrer que p est le projecteur orthogonal sur $\mathscr{S}_2$, pour le produit scalaire $<, >$.

I.C.3) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de p est diagonale.

I.C.4) **Application :** dans cette question, on suppose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer $p(A)$.

b) Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $p(A) = PDP^{-1}$.

c) Déterminer une équation réduite de $\phi(A)$, et en déduire la nature de $\phi(A)$.

I.D - Soit A une matrice symétrique non nulle.

En utilisant le fait que A est diagonalisable dans une base orthonormale, donner, en fonction du signe de $\det(A)$, la forme des équations réduites de $\phi(A)$ par rapport à une base orthonormale convenable, et la nature de $\phi(A)$.

I.E - Soit A une matrice orthogonale d'ordre 2 : $A \in O_2(\mathbb{R})$.

I.E.1) Donner en fonction de $\det(A)$, la nature de l'endomorphisme ayant pour matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

I.E.2) Déterminer la nature de $\phi(A)$ dans le cas : $det(A) < 0$
On montrera que $\phi(A)$ peut se déduire de la surface d'équation :

$$z = x^2 - y^2$$

par une rotation convenablement choisie.

I.E.3) Étudier le cas : $det(A) > 0$

I.E.4) **Application :** on considère les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Déterminer une rotation transformant $\phi(A)$ en $\phi(B)$.

Dans toute la suite du problème, on considère l'application ϕ_1 de E dans Σ, qui à toute matrice A, associe la surface (S) d'équation cartésienne :

$$z^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

I.F -

I.F.1) On suppose la matrice A symétrique réelle non nulle. Comme dans la question I.D, donner, en fonction du signe de $det(A)$ et de $tr(A)$, la forme des équations réduites de $\phi_1(A)$ par rapport à une base orthonormale convenable, et la nature de $\phi_1(A)$.

I.F.2) Écrire une procédure qui à toute matrice A de E, associe la nature de $\phi_1(A)$ (on pourra utiliser le langage de son choix).

I.F.3) **Application :** on suppose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Étudier $\phi_1(A)$. Déterminer l'équation réduite et le repère adapté correspondant.

Partie II - Application à une famille de surfaces

On considère dans cette partie, pour tout réel θ, la surface Σ_θ d'équation cartésienne :

$$z = \cos\theta(x^2 + y^2) + 2\sin\theta\ xy.$$

Pour tout réel λ, on considère la courbe plane $\Gamma_{\lambda,\theta}$ d'équation cartésienne :

$$\lambda = \cos\theta(x^2 + y^2) + 2\sin\theta\ xy.$$

II.A - Pour λ fixé, que représente $\Gamma_{\lambda,\theta}$ pour Σ_θ ?

II.B - Déterminer la matrice A_θ symétrique telle que $\Sigma_\theta = \phi(A_\theta)$.

II.C - On suppose que θ est un réel quelconque.

II.C.1) Déterminer des expressions, en fonction du réel θ, des valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A_θ, et une base orthonormale $\mathscr{B}$ diagonalisant A_θ.

II.C.2) Déterminer la nature de la courbe $\mathscr{C}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = \lambda_1 \\ y(\theta) = \lambda_2 \end{cases}$$

II.C.3) Calculer $det(A_\theta)$ et $tr(A_\theta)$.

II.D - On suppose que θ est un réel quelconque

II.D.1) Comparer les surfaces Σ_θ et $\Sigma_{\theta+2\pi}$.

II.D.2) Donner une transformation géométrique permettant de passer de Σ_θ à $\Sigma_{\pi+\theta}$.

II.D.3) Donner une transformation géométrique permettant de passer de Σ_θ à $\Sigma_{-\theta}$.

II.E - On suppose $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

II.E.1) Déterminer la nature de Σ_θ suivant les valeurs du réel θ.
On distinguera les cas :

a) $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{4}$

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{4} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

II.E.2) Déterminer la nature de $\Gamma_{\lambda,\theta}$ suivant les valeurs des réels λ et θ.

II.E.3) Tracer rapidement l'allure des courbes $\Gamma_{\lambda,\theta}$, pour différentes valeurs du réel λ, dans les cas suivants :

a) $\theta = 0$

b) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Partie III - Application de ϕ_1

On considère dans cette partie les surfaces C_θ d'équation :

$$z^2 = \cos\theta(x^2 - y^2) + 2\sin\theta\ xy$$

III.A - Donner la nature de la surface C_0.

III.B - Déterminer la nature de la surface C_θ en utilisant la partie I.

III.C - Montrer que C_θ est l'image de C_0 par une rotation d'axe Oz que l'on précisera.

III.D - Soit Q le plan d'équation : $z = 1$

Soit γ_θ la courbe intersection de la surface C_θ avec le plan Q.
Déterminer une équation cartésienne de la courbe γ_θ.
Donner la nature de la courbe γ_θ.
Tracer sur un unique dessin les graphes des courbes γ_0, $\gamma_{\frac{\pi}{2}}$, γ_π.

Partie IV - Une autre application

Pour tout réel a, on considère la surface S_a d'équation cartésienne :

$$\sin^2 a\ x^2 + \cos^2 a\ z^2 - 2\sin a\ yz - 2\sin a\cos a\ xz - 2\cos a\ xy = 0$$

IV.A - Étude de la surface S_0

IV.A.1) Trouver une matrice A symétrique telle que $S_0 = \phi_1(A)$.

IV.A.2) En déduire la nature de S_0 en utilisant la partie I.

IV.A.3) Déterminer l'équation réduite de S_0, sa nature et son axe.

IV.B - Étude de la surface S_a

IV.B.1) Donner la matrice de la rotation d'axe Oy et d'angle a.

IV.B.2) Déterminer l'image de la surface S_0 par la rotation précédente.

IV.B.3) En déduire la nature de la surface S_a.

IV.C - Étude d'une famille de paraboles

Soit λ un réel quelconque non nul, et R_λ le plan d'équation $y = \lambda$.
Soit P_λ la courbe intersection de la surface S_0 avec le plan R_λ.

IV.C.1) Montrer que P_λ est une parabole, et déterminer les coordonnées de son foyer, noté F_λ.
Déterminer l'ensemble L décrit par le foyer F_λ quand le réel λ décrit $\mathbb{R}^*$.

IV.C.2) À partir du résultat de la question précédente, déterminer l'ensemble F des foyers des paraboles tracées sur S_0. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble F, et préciser la nature de F.

••• FIN •••