# Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière MP

*Les calculatrices sont autorisées*

**Notations**

$n$ et $m$ sont des entiers naturels vérifiant $1 \leq m \leq n$.
$E$ et $F$ désignent les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis de leur structure euclidienne canonique. On note $I_E$ l'application identité de $E$. Le produit scalaire est noté $(.|.)$ aussi bien dans $E$ que dans $F$ et la norme euclidienne est notée $||.||$. $S^+(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) positifs de $E$, $S^{++}(E)$ le sous-ensemble constitué des endomorphismes autoadjoints définis positifs. On rappelle que, si $u \in S^{++}(E)$, alors $\phi_u : (x, y) \mapsto (u(x)|y)$ est un produit scalaire sur $E$.

## Partie I - Produit de deux endomorphismes autoadjoints positifs

*On se propose dans cette partie de montrer, en plus de quelques généralités, que si $u$ et $v$ sont des éléments de $S^+(E)$, alors $u \circ v$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.*

### I.A - Généralités

I.A.1) Montrer qu'un endomorphisme symétrique de $E$ est dans $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^{+*}$).

I.A.2) Montrer que si $u \in S^{++}(E)$, alors $u^{-1} \in S^{++}(E)$.

I.A.3) Soit $u \in S^+(E)$.

a) Montrer qu'il existe un élément $s$ de $S^+(E)$ tel que $u = s^2$.

b) En déduire que :

$$\forall x \in E, (u(x)|x) = 0 \Rightarrow u(x) = 0. \qquad (1)$$

### I.B - Preuve du résultat

*$u$ et $v$ désignent des éléments de $S^+(E)$.*

I.B.1) On note $u_1$ et $w$ les endomorphismes de $Im(u)$ induits par $u$ et $u \circ v$ respectivement.

a) Montrer que $u_1$ est un élément de $S^{++}(Im(u))$.

b) Montrer que $w$ est autoadjoint positif relativement à $\phi_{u_1^{-1}}$ où $\phi_{u_1^{-1}}$ est le produit scalaire sur $Im(u)$ défini dans les notations.

I.B.2) Déduire de la question précédente que l'endomorphisme de $Im(u \circ v)$ induit par $u \circ v$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

I.B.3) Montrer, à l'aide de (1), que :

$$E = Im(u \circ v) \oplus Ker(u \circ v).$$

I.B.4) Conclure.

### I.C - Cas particulier

*$a$ désigne un élément de $S^{++}(E)$ et $f$ un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.*

I.C.1)

a) Montrer qu'il existe un unique élément $g$ de $\mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout couple $(x, y)$ de $E \times F$, $(f(x)|y) = (x|g(y))$.

L'application $g$ est notée $f^*$.

b) Montrer que : $Ker(f^*) = [Im(f)]^\perp$.

c) En déduire que si une suite $(z_k)_k$ d'éléments de $Im(f)$ est telle que la suite $(f^*(z_k))_k$ converge vers 0, alors la suite $(z_k)_k$ converge vers 0.

d) Montrer que :

$$f^* \circ f \in S^+(E).$$

I.C.2) Montrer que $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphismes diagonalisable de $E$ et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

On note $\rho$ sa plus grande valeur propre.

I.C.3) Montrer que :

$$\forall x \in E, ||f(x)||^2 \leq \rho(a(x)|x).$$

- version du 23 février 2009 16h25

# *Partie II - Minimisation d'une fonctionnelle quadratique*

*Désormais $a$ désigne un élément de $S^{++}(E)$, $b$ est un élément fixé de $E$ et $f$ est un élément non nul de $\mathcal{L}(E,F)$.*
*$J$ est l'application de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall x \in E, J(x) = \frac{1}{2}(a(x)|x) - (b|x).$$

### II.A - Minimisation théorique

*On considère un sous-espace vectoriel $V$ de $E$ et on s'intéresse à la minimisation de la restriction de $J$ à $V$.*

II.A.1) Montrer que si $||x||$ tend vers $+\infty$ et $x \in V$, alors $J(x)$ tend vers $+\infty$.

II.A.2) Déduire de la question précédente l'existence d'un minimum de la restriction de $J$ à $V$.

II.A.3) Soit $(x,y)$ un élément de $V^2$ tel que $x \neq y$.

a) Montrer que :

$$J(\frac{x+y}{2}) < \frac{J(x)+J(y)}{2}.$$

b) En déduire que la restriction de $J$ à $V$ atteint son minimum en un seul point.

II.A.4) Soit $x \in V$ et $(t,h) \in \mathbb{R} \times V$.

a) Calculer $J(x+th) - J(x)$.

b) En déduire que la restriction de $J$ à $V$ est minimale en $x$ si et seulement si

$$a(x) - b \in V^{\perp}. \qquad (2)$$

II.A.5) Ici $n = 3$ et $\omega$ est l'élément de $E$ en lequel $J$ est minimale. Pour tout réel $k > J(\omega)$, on note $\mathcal{E}_k$ la surface d'équation $J(x) = k$ et on considère un plan vectoriel $\Pi$ inclus dans $E$ auquel $\omega$ n'appartient pas.

a) Déterminer la nature de la surface $\mathcal{E}_k$ et donner son centre.

b) Montrer qu'il existe une unique valeur de $k$ pour laquelle $\Pi$ est tangent à la surface $\mathcal{E}_k$.

c) Déterminer cette valeur de $k$ si $\mathcal{E}_k$ et $\Pi$ sont d'équations respectives :

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x = k$ et $x + y + z = 0$ relativement à la base canonique de $E$.

### II.B - Lagrangien augmenté

*Soit $r$ un réel positif et $L_r$ est l'application de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$L_r(x,p) = J(x) + \frac{r}{2}||f(x)||^2 + (p|f(x)).$$

*On dit que $(x,p)$ est un point selle de $L_r$ si, pour tout couple $(y,q)$ dans $E \times F$, $L_r(x,q) \le L_r(x,p) \le L_r(y,p)$ ou encore ($L_r(x,.)$ est maximale en $p$ et $L_r(.,p)$ est minimale en $x$).*

II.B.1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $L_r(x,.)$ admet un maximum,
- $x \in Ker(f)$,
- $L_r(x,.)$ est constante.

II.B.2) Montrer que :
$L_r(.,p)$ est minimale en $x$ si et seulement si $(a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) = b$. (3)

II.B.3)

a) Montrer que $(x,p)$ est un point selle de $L_r$ si et seulement si

$$(x \in Ker(f) \quad \text{et} \quad a(x) + f^*(p) = b). \qquad (4)$$

b) En déduire que la restriction de $J$ à $Ker(f)$ est minimale en $x$ si et seulement si il existe un élément $p$ de $F$ tel que $(x,p)$ est un point selle de $L_r$.

II.B.4) Soit $(x,p)$ un point selle de $L_r$.

a) Montrer que $(x,p')$ est encore un point selle de $L_r$ si et seulement si $p' - p$ est un élément de $[Im(f)]^{\perp}$.

b) Montrer que, parmi les points selle de $L_r$ du type $(x,p')$, il en existe un et un seul pour lequel $||p'||$ est minimale et le caractériser.

# *Partie III - Algorithmes d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz*

*On reprend les notations de la partie précédente et on note $x$ l'élément de $Ker(f)$ en lequel la restriction de $J$ à $Ker(f)$ est minimale. On note également $p$ un élément de $F$ tel que $(x,p)$ est un point selle de $L_r$.*
*$\rho$ désigne la plus grande valeur propre de $a^{-1} \circ f^* \circ f$, $p_0$ est fixé dans $F$ et $(\gamma_k)_k$ désigne une suite de réels à valeurs dans $[\alpha,\beta]$, où $0 < \alpha < \beta < 2(r + \frac{1}{\rho})$.*
*On considère la suite $(x_k)_k$ d'éléments de $E$ et la suite $(p_k)_k$ d'éléments de $F$ définies de la façon suivante :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, L_r(.,p_k) \text{ est minimale en } x_k \text{ et } p_{k+1} = p_k + \gamma_k f(x_k).$$

**III.A -**

III.A.1) On pose, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, $y_k = x_k - x$ et $r_k = p_k - p$.

a) Montrer que :

$$r_{k+1} = r_k + \gamma_k f(y_k) \quad \text{et} \quad (a + rf^* \circ f)(y_k) + f^*(r_k) = 0.$$

b) Montrer que :

$$||r_k||^2 - ||r_{k+1}||^2 = \gamma_k \left[2(a(y_k)|y_k) + (2r - \gamma_k)||f(y_k)||^2\right] \geq \alpha \left[2(r + \frac{1}{\rho}) - \beta\right] ||f(y_k)||^2.$$

c) En déduire la convergence de la suite $(||r_k||)_k$ puis celle de la suite $(x_k)_k$ vers $x$.

**III.B -**

III.B.1) On pose, pour tout entier $k$, $p_k = \overline{p_k} + \overline{q_k}$ où $(\overline{p_k}, \overline{q_k}) \in Im(f) \times [Im(f)]^\perp$ et, de même, $p = \overline{p} + \overline{q}$ où $p = (\overline{p}, \overline{q}) \in Im(f) \times [Im(f)]^\perp$.

a) Montrer que la suite $(\overline{q_k})_k$ est constante.

b) Montrer que :

$$f^*(\overline{p_k} - \overline{p}) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

c) En déduire que la suite $(p_k)_k$ converge vers $\overline{p} + \overline{q_0}$.

*Désormais, on choisit $p_0 = 0$ et la suite $(\gamma_k)_k$ constante égale à $\gamma$. Dans ces conditions, la suite $((x_k, p_k))_k$ converge vers $(\overline{x}, \overline{p})$ point selle de $L_r$ avec $||\overline{p}||$ minimale.*

III.B.2) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \left(\left[I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f\right]^k \circ (a + rf^* \circ f)^{-1}\right)(b).$$

III.B.3) On suppose que, relativement à la base canonique de $E$, la matrice de $a$ est diagonale, soit $\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ et que celle de $f$, relativement aux bases canoniques de $E$ et $F$, admet pour coefficient générique

$$f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que $I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphisme autoadjoint de $E$ qui laisse stables $Ker(f)$ et $[Ker(f)]^\perp$. On note $\psi$ l'endomorphisme induit sur $[Ker(f)]^\perp$.

b) Déterminer la norme de $\psi$ subordonnée à $||.||$ ; on la note $\epsilon$.

c) $r$ est supposé fixé. Comment choisir $\gamma$ pour que $\epsilon$ soit minimal ? Quelle est alors sa valeur ?

d) Quelle est alors l'influence de $r$ sur la rapidité de convergence de la suite $(x_k)_k$ ?

III.B.4) On se place toujours dans les bases canoniques de $E$ et $F$ et on se donne les matrices $A$, $B$ et $F$ de $a, b$ et $f$ par leur coefficient générique :

$$a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad b_i = 1, \quad f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = m + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que $a$ est effectivement un endomorphisme de $E$ défini positif.

b) Écrire une procédure effectuant lorsqu'on choisit $\gamma = 2r$, le calcul de $X_k$, matrice de $x_k$ relativement à la base canonique de $E$ (on supposera $n, m$ et $r$ définis numériquement mais on définira les matrices $A, B$ et $F$).

**••• FIN •••**