Épreuve orale de Mathématiques II - Filière PC

Exemples d'exercices proposés lors de la session 2009

Énoncé 1

Pour A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\varphi(M) = A\,M - M\,A.$$

1. Dans cette question on prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 5 & 0 \\ -5 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Donner les éléments propres de A.

On note P une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

b) On note $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

i. Calculer les matrices $F_{i,j} = P\,E_{i,j}\,P^{-1}$ pour (i,j) de $[\![1,4]\!]^2$.

ii. Calculer les images des $(F_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2}$ par φ.

Que peut-on en conclure ?

c) Retrouver ce résultat dans le cas général d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

2. Dans cette question on prend

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 & 8 \\ 4 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Est elle diagonalisable ?

Vérifier que $A^4 = 0$.

Déterminer le plus petit des entiers naturels k tel que φ^k soit l'endomorphisme nul.

Énoncé 2

Pour A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B de $\mathbb{R}^n$, on étudie le système linéaire $A\,X = B$, d'inconnue X dans $\mathbb{R}^n$.

Lorsque la diagonale de A ne contient pas de termes nuls, pour U de $\mathbb{R}^n$, on définit par récurrence une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ avec $Y_m = (y_i^{(m)})_{1\leqslant i\leqslant n}$ par $Y_0 = U$ et, pour tout (m,i) de $\mathbb{N}\times[\![1,n]\!]$,

$$y_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_{i,i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}\,y_j^{(m)}\right)$$

1. Montrer que si la suite $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente, la limite est une solution de $A\,X = B$.
2. Calculer les vingt premiers termes d'une telle suite lorsque

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & -7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

A

puis recommencer avec un U de votre choix et une matrice A telle que pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

(On pourra observer que $X' = \Phi(X)$ où $\Phi(X) = D^{-1}(B-(A-D)X)$, D étant la matrice diagonale $diag(a_{1,1},\dots,a_{n,n})$ et programmer une fonction J qui prend en arguments une matrice carrée A, deux vecteurs B et X (de tailles adaptées) et retourne le vecteur $X' = J(A,B,X)$ défini par la récurrence ci-dessus - c'est-à-dire $Y_{m+1} = J(A,B,Y_m)$ -)

3. Quelle condition peut-on imposer sur A pour que la suite $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge quelle que soit U ?

Énoncé 3

Pour f et g fonctions continues sur $[-1,1]$ et à valeurs réelles, on note

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

et on admet que celà définit un produit scalaire sur $C^0([-1,1],\mathbb{R})$.

On note $L_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

1 . a) Calculer $L_n(x)$ pour n de 1 à 10.
Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de L_n.

b) Calculer $< L_n, L_m >$ pour $0 \leq n \leq m \leq 5$.
On admet que le résultat observé est vrai pour toute la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Quelle est la famille de polynômes obtenue par orthonormalisation de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ avec le procédé de Gram-Schmidt pour le produit scalaire ci-dessus ?

2. Tracer les graphes de L_n sur $[-1,1]$ pour n de 1 à 5.
Que dire des racines de ces polynômes ? Où sont-elles ?
On admet que le résultat observé est vrai pour tout n de $\mathbb{N}^*$

3 . a) Soit n un entier au moins égal à 2 et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille des racines de L_n rangées dans l'ordre croissant.
On admet qu'il existe un n-uplet $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} Q(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q(x_i).$$

Expliciter ces réels dans le cas $n = 3$.

b) Montrer le résultat admis précédemment et montrer que cette formule reste valable avec tout $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Énoncé 4

Le plan euclidien orienté usuel est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(u) = 2 + \frac{u}{5} - 2\cos(u) + 9\sin\left(\frac{u}{3}\right)$$

et l'arc Γ_f paramétré par

$$f(t) = \left(\int_0^t \cos[\varphi(u)]du, \int_0^t \sin[\varphi(u)]du\right), \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

a) Donner une représentation à l'écran de Γ_f sur $[-15\pi, 15\pi]$.

b) À l'aide de valeurs approchées, vérifier que $f(-15\pi) = f(15\pi)$.

c) Comparer $f'(-15\pi)$ et $f'(15\pi)$, puis $f''(-15\pi)$ et $f''(15\pi)$.

d) Montrer que l'arc Γ_f est régulier et calculer sa longueur pour $t \in [-15\pi, 15\pi]$.

e) Exprimer la courbure γ en fonction de t à l'aide des fonctions usuelles.

f) Calculer $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-15\pi}^{15\pi} \gamma(t)dt$.

2. Pour $[a,b] \subset I$, on dit qu'un arc $\Gamma = (I, f, C)$ avec f de classe C^2 sur I et $C = f(I)$ boucle sur $[a,b]$ si $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b)$ et $f''(a) = f''(b)$.

a) Pour h fonction continue de la variable s sur $\mathbb{R}$, écrire sous forme d'intégrales le paramétrage f_h de l'unique arc paramétré Γ_h d'abscisse curviligne s et de courbure h tel que $f_h(0) = (0,0)$, $f_h'(0) = (1,0)$.

b) Montrer que pour h continue de période $T > 0$ on a :
si Γ_h boucle sur $[0, nT]$,
alors il existe un m de $\mathbb{Z}$ tel que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^T h(s)ds = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$.

c) On admet la réciproque.

Donner deux a de $\mathbb{R}$ tels que la courbe Γ_h pour $h(s) = a + \sin(s)$ ne boucle pas et donner deux a tels qu'elle boucle, par exemple sur $[0, 6\pi]$ et sur $[0, 20\pi]$.

On donnera pour ces exemples les tracés correspondants.

Énoncé 5

On pose pour tout entier naturel n,

$$u_n = \cos(\pi\sqrt{1 + n + n^2})$$

1 . a) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

(on pourra s'intéresser à $\sin\left(\pi\left[\sqrt{n^2 + n + 1} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\right)$)

b) En déduire la nature de la série de terme général u_n.

c) Donner une valeur approchée décimale de la somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (on n'en demande pas la valeur exacte).

2. On construit une nouvelle série en groupant les termes de (u_n) deux par deux en posant, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

a) Déterminer un équivalent de v_n et en déduire la convergence de la série de terme général v_n.

b) Donner une valeur approchée décimale de la somme $S' = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Que constate-t-on ? Démontrer ce résultat.

3. On construit une nouvelle série en groupant les termes de (u_n) trois par trois en posant pour tout n : $w_n = u_{2n} + u_{4n+1} + u_{4n+3}$.

a) Déterminer un équivalent de w_n en l'infini et en déduire la convergence de la série de terme général w_n.

b) Donner une valeur approchée décimale de $S'' = \sum_{n=0}^{\infty} w_k$.

Que constate-t-on ?

c) Déterminer une relation entre $\sum_{k=0}^{4n+3} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n} w_k$ en déduire la valeur de $S - S''$.

4. On construit une dernière série en groupant les termes de (u_n) trois par trois en posant pour tout n : $z_n = u_{2n+1} + u_{4n} + u_{4n+2}$.

a) Déterminer un équivalent de z_n et en déduire la convergence de la série de terme général z_n.

b) Donner une valeur approchée décimale de la somme $S''' = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Que constate-t-on ?