

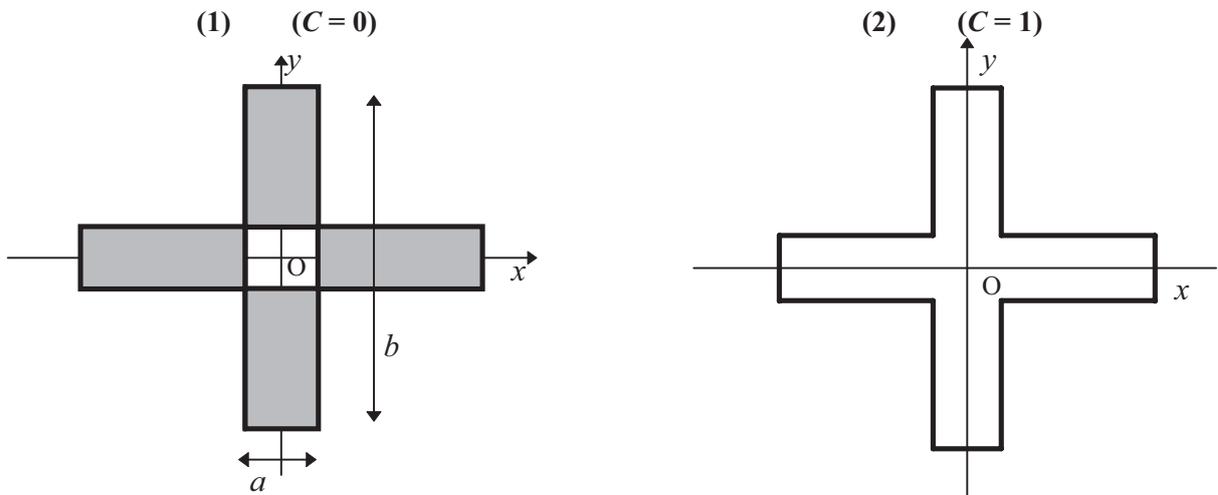
Épreuve orale de Physique II - Filière PC

Optique

On observe la figure de diffraction à l'infini d'un cache plan parfaitement opaque hormis une ouverture en forme de croix. Cet objet est éclairé uniformément par un Laser He-Ne délivrant une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$. On dispose en outre d'une lentille convergente de distance focale $f' = 1 \text{ m}$.

1. Donner un schéma du dispositif expérimental approprié à l'obtention de la figure de diffraction de Fraunhofer (ou « à l'infini ») de cet objet.

La croix utilisée, symétrique, peut être l'une des suivantes:



La largeur de chacune des branches est a ; la longueur de chacune des branches est $b > a$ et λ .

On rappelle que la transmittance T d'un écran partiellement transparent est le rapport de l'amplitude de la vibration lumineuse transmise par l'amplitude de la vibration lumineuse incidente: ainsi, la transmittance d'un écran parfaitement opaque est égale à 0, celle d'un trou dans l'écran est égale à 1. La croix (2) est parfaitement transparente, mais les branches de la croix (1) (parties ombrées) n'ont qu'une transmittance de 0,5 ; le carré central a en revanche une transmittance de 1.

2. Déterminer l'intensité $I(X,Y)$ en un point de l'écran d'observation de coordonnées (X,Y) pour la croix (1). La figure de diffraction est tracée avec le logiciel Diffint [Fichier i23001.exo, choix $C = 0$]. L'unité de longueur utilisée est le mm. Évaluer les valeurs de a et b .

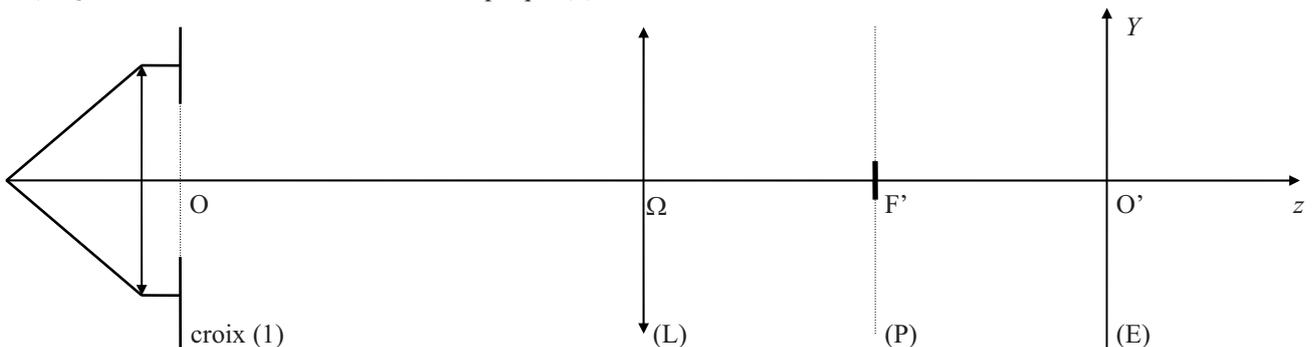
3. Comparer avec l'intensité obtenue avec la croix (2) [choix $C = 1$] et interpréter.

4. On réalise avec la croix (1) le montage représenté par la figure ci-dessous dans lequel on a $\Omega F' = f'$, $O\Omega = 2f' = \Omega O'$.

Au plan focal image (Π_F) de (L) on place une plaque de verre (P) parfaitement transparente, sauf sur la droite ($F'x$) qui est masquée par un long trait de feutre noir, totalement absorbant.

a) Qu'observe-t-on sur l'écran d'observation (E) en l'absence de (P) ?

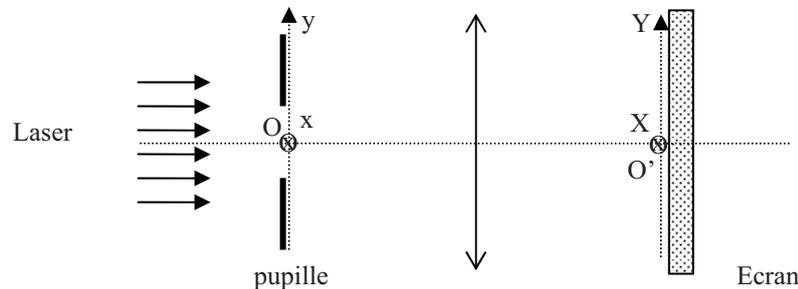
b) Qu'observe-t-on sur l'écran une fois la plaque (P) insérée ?



Solution

Les logiciels sont disponibles sur le site : <http://www.lgep.supelec.fr/index.php?page=scm-logiciels>

1. L'étudiant est censé connaître le montage classique d'observation 'à l'infini' d'une figure de diffraction. Le laser fournissant une onde plane que l'on suppose ici suffisamment étendue pour éclairer uniformément la pupille de diffraction, il n'est besoin que d'une lentille au foyer de laquelle on observera la diffraction à l'infini sur un écran placé dans son plan focal. D'où un schéma de montage sur lequel il est recommandé d'indiquer des axes



2. Le calcul est grandement simplifié si l'étudiant remarque que l'amplitude diffractée par la croix (1) est la somme de l'amplitude diffractée par la branche verticale et de l'amplitude diffractée par la branche horizontale, chacune calculée avec une transmittance de 0,5. Il peut alors donner directement l'expression de l'amplitude diffractée par un rectangle s'il la connaît.

Pour la branche verticale il vient

$$\underline{S}_v = kTab \exp\left[j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}L_{SOM}\right)\right] \text{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi b Y}{\lambda f'}\right)$$

Pour la branche horizontale il vient

$$\underline{S}_h = kTab \exp\left[j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}L_{SOM}\right)\right] \text{sinc}\left(\frac{\pi a Y}{\lambda f'}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi b X}{\lambda f'}\right)$$

et l'amplitude totale diffractée par la croix (1) est donnée par $\underline{S}_{tot} = \underline{S}_v + \underline{S}_h$

L'étudiant prendra soin de définir chacune des variables introduites.

k = coefficient de proportionnalité dépendant du laser, ω pulsation correspondant à la longueur d'onde utilisée, t le temps, j tel que $j^2 = -1$, T = transmittance (1/2 ici), L_{SOM} chemin optique depuis la source S jusqu'au point O puis au point M de coordonnées (X, Y) sur l'écran, sinc désignant le sinus cardinal. Les grandeurs X/f' et Y/f' correspondent aux angles d'observation de la diffraction à l'infini dans l'approximation des petits angles.

L'examineur pourra éventuellement demander tout ou partie de la démonstration conduisant aux résultats ci-dessus.

L'intensité ou l'éclairement observé sur l'écran est alors égal à

$$I = k^2 T^2 (ab)^2 \left[\text{sinc}\left(\frac{\pi a Y}{\lambda f'}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi b X}{\lambda f'}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi b Y}{\lambda f'}\right) \right]^2$$

L'estimation des grandeurs a et b se fait grâce au logiciel.

L'étudiant doit savoir que la diffraction par une fente est d'autant plus importante que la fente est fine et surtout qu'elle se fait dans une direction perpendiculaire à l'orientation de la fente. Enfin, il doit savoir que dans un sinus cardinal la largeur de la tâche principale est double de celle des tâches secondaires.

Sur la figure 1 la diffraction selon l'axe vertical est due à la branche horizontale de la croix et inversement. C'est donc la petite largeur a des fentes qui est à l'origine des grandes tâches de diffraction. Sur chaque axe, outre la tâche principale, on compte quatre maxima secondaires, le tout s'étendant sur une distance de $\sim 37,4$ mm. Les annulations de l'intensité selon l'axe vertical ont lieu pour $\frac{\pi a X}{\lambda f'} = p\pi$, avec p entier. On en déduit $a \approx 0,1$ mm. Les petites tâches lumineuses voisines des tâches principales

sont dues à la diffraction selon l'autre dimension, b , des branches de la croix. Pour estimer b , il est recommandé d'effectuer des mesures autour d'un maximum secondaire des tâches principales, la diffraction autour du centre de la figure étant une superposition de diffraction selon l'horizontale et la verticale ce qui fausse les mesures. On peut utiliser la fonction ZOOM du logiciel et la mesure de la tâche principale et de deux maxima secondaires donne une distance de $\sim 1,2$ mm d'où on déduit $b \approx 2$ mm. L'examineur appréciera que l'étudiant prenne des mesures incluant plusieurs tâches de diffraction afin de minimiser l'erreur de mesure sur l'estimation de a et b . De plus, pour les applications numériques, l'expression de toutes les distances en mm (unité de la figure) conduit à des relations simples qui ne nécessitent pas l'emploi de la calculatrice.

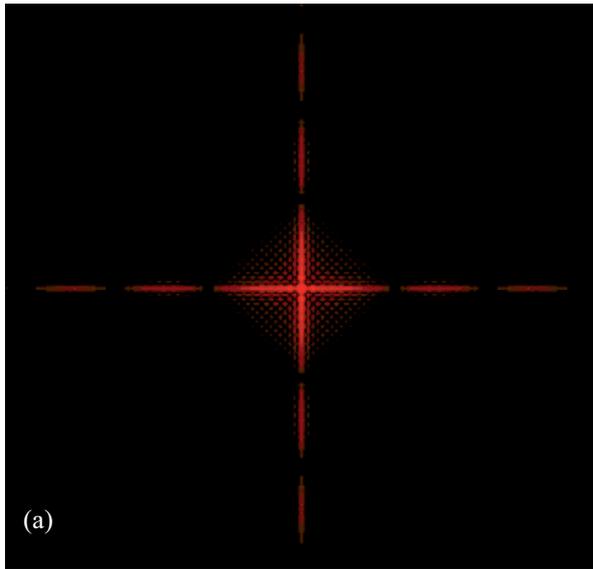
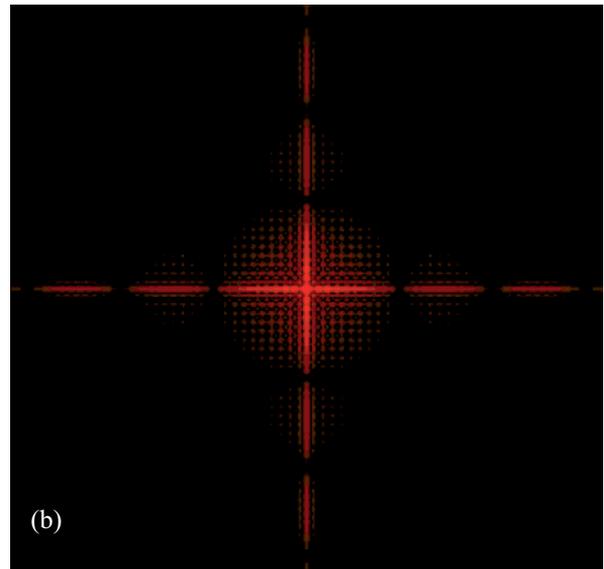


Figure 1 Diffraction par la croix (1)



Diffraction par la croix (2)

3. L'étudiant ayant conservé les résultats précédents résoudra rapidement cette question. Pour le calcul de l'éclairement pour la croix (2) on peut reprendre le raisonnement suivi pour la croix (1) (i. e. superposition de la contribution de chacune des branches) en sachant que dans ce cas on compte deux fois la contribution du carré central puisque $T = 1$. Il faut donc soustraire à l'expression obtenue en 2. la contribution à la diffraction d'un carré de côté a . Soit

$$I = k^2 T^2 \left[ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a Y}{\lambda f'}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b X}{\lambda f'}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b Y}{\lambda f'}\right) - a^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a Y}{\lambda f'}\right) \right]^2$$

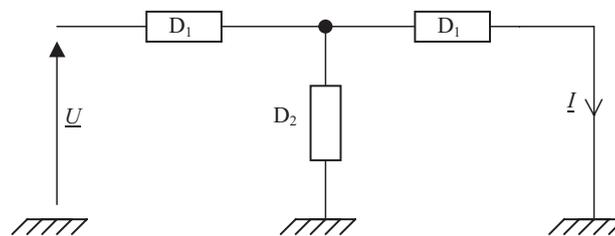
en prenant $T = 1$.

Ainsi, on observe une figure identique à celle de la croix (1) avec plus de lumière en dehors des axes (voir figure 1).

4. De simples connaissances en optique géométrique suffisent pour résoudre cette question.
- La distance entre la pupille diffractante et la lentille est $2f'$ et la distance entre la lentille et l'écran (E) est aussi $2f'$. Il s'agit d'un montage optique qui projette sur l'écran une image en vrai grandeur de l'objet avec un grandissement de -1 . L'application d'une simple relation de conjugaison conduit rapidement à ce résultat. Donc, sur l'écran (E) on observe l'image inversée à l'échelle 1 de la pupille diffractante.
 - La plaque de verre se situe exactement à l'endroit où on placerait un écran pour observer la diffraction due à la croix (1). Le trait sombre supprime donc la lumière diffractée par la branche **verticale** de cette croix. Seule la lumière provenant de la branche horizontale de la croix (1) atteint l'écran. Sur l'écran situé à $2f'$ de la lentille on n'observe donc qu'un trait **horizontal** correspondant à l'image de la branche horizontale de la croix (1).

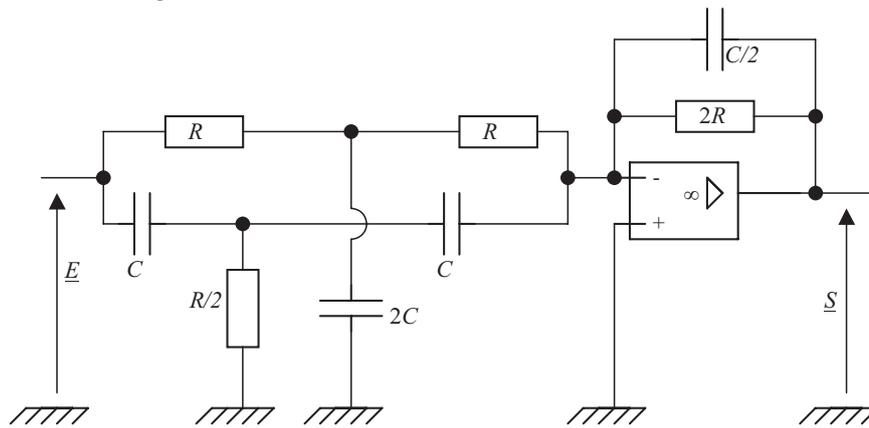
Électrocinétique - électronique

1. On considère la structure suivante :

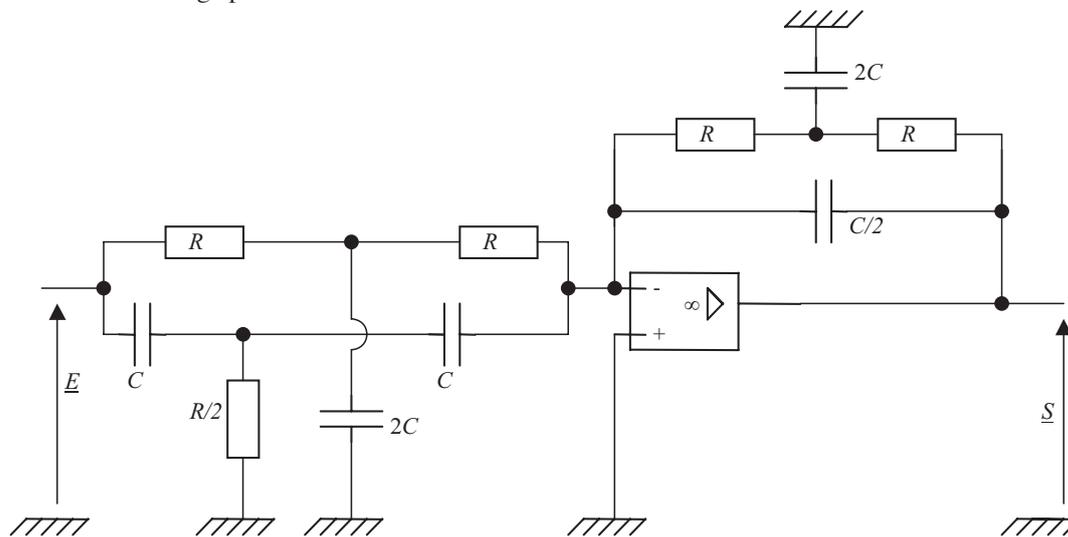


Les dipôles (D_1) et (D_2) sont des dipôles passifs linéaires, caractérisés par leurs admittances respectives Y_1 et Y_2 . Exprimer alors I en fonction de U sous la forme : $I = T_Y U$, où T_Y sera écrite en fonction de Y_1 et Y_2 .

2. On considère maintenant le montage suivant :



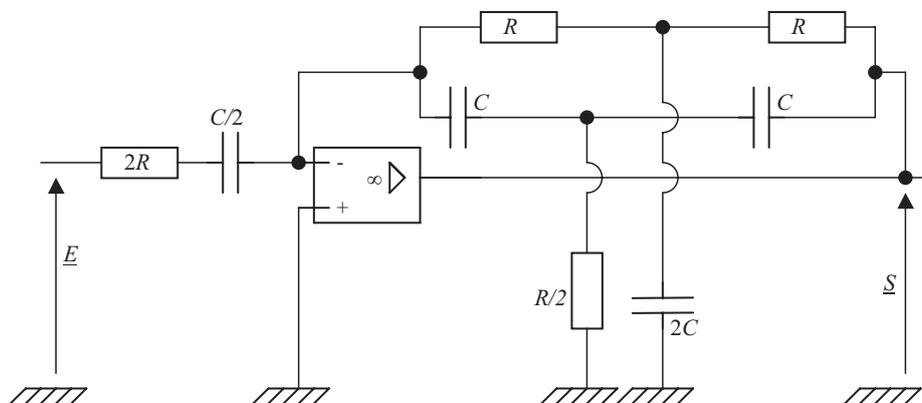
- Préciser sans calcul la nature du filtrage réalisé par ce montage.
- Déterminer la fonction de transfert $H_1(j\omega) = \frac{S}{E}$ et donner l'allure asymptotique des diagrammes de Bode en gain et phase.
- Une variante du montage précédent est le suivant :



En quoi ce dernier montage est-il plus performant que le précédent ?

On pourra comparer leurs diagrammes de Bode sur ordinateur [Logiciel AnHarm, fichier i33013.fct] : afficher les 'Paramètre(s)' et prendre *choix* = 1 pour le premier (2.a) ou *choix* = 2 pour le second (2.c).

3. On envisage maintenant :



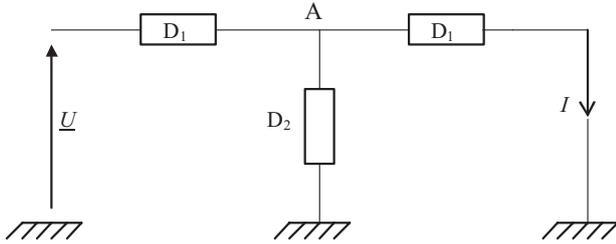
- De nouveau, déterminer sans calculs le type du filtrage réalisé.
- Déterminer la fonction de transfert, donner les diagrammes de Bode en gain et phase. Ce dernier montage peut-il effectivement fonctionner en tant que filtre ? Quel est néanmoins son intérêt ?

Solution

Les logiciels sont disponibles sur le site : <http://www.lgep.supelec.fr/index.php?page=scm-logiciels>

Dans cet exercice, comme dans beaucoup d'autres, nous attendons de l'étudiant à la fois une approche qualitative des phénomènes étudiés et qu'il sache mener un calcul jusqu'à son terme en utilisant éventuellement des résultats intermédiaires.

1.



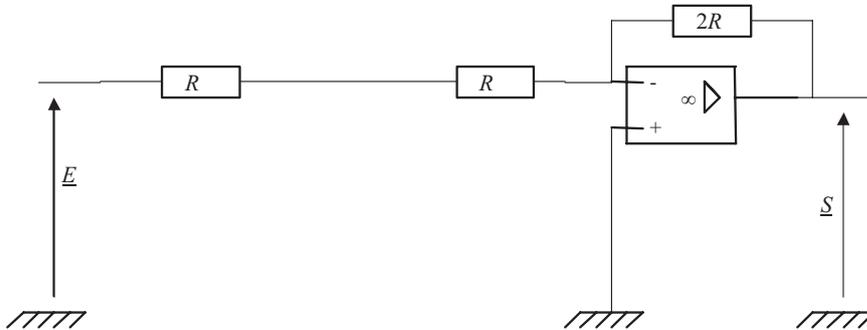
Application du théorème de Millman avec des admittances : $V_A = \frac{Y_1}{2Y_1 + Y_2} U \Rightarrow I = \frac{Y_1^2}{2Y_1 + Y_2} U$

2.

a) Analyse qualitative

L'étudiant doit déterminer les comportements du circuit en haute et basse fréquence en raisonnant sur les équivalences des condensateurs dans ces deux domaines.

En basse fréquence (BF) les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Le montage est donc équivalent à un simple suiveur/inverseur : $S = -E$ (Voir figure ci-dessous).



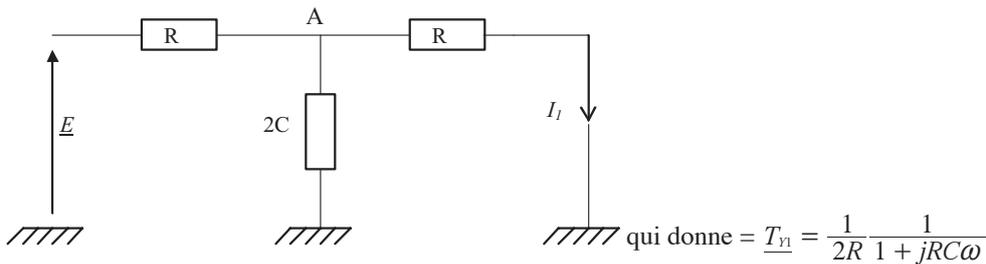
En haute fréquence (HF), les condensateurs sont équivalents à des court-circuits. Le montage est encore équivalent à un simple suiveur/inverseur : $S = -E$.

Le montage peut être un déphaseur si la phase est telle que $-\pi \leq \phi \leq \pi$, mais il peut s'agir aussi d'un filtre coupe bande.

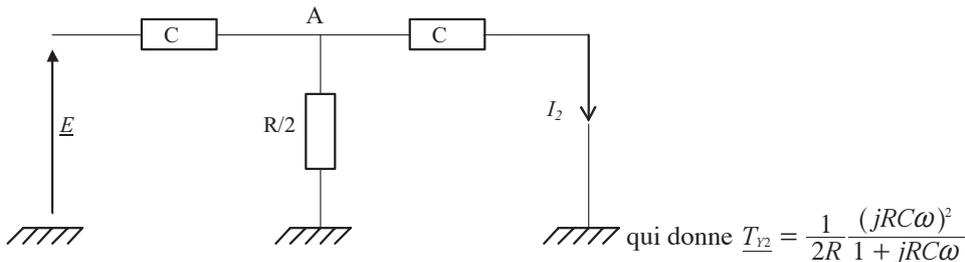
b) Calcul de la fonction de transfert

Afin de simplifier ses calculs, l'étudiant doit utiliser le résultat de la question 1.

L'entrée comporte deux montages en T.



Et



On a donc $E(T_{Y1} + T_{Y2}) = -S \left(\frac{jC\omega}{2} + \frac{1}{2R} \right)$, soit finalement

$$\underline{H} = -\frac{1 + (jx)^2}{1 + 2jx + (jx)^2}$$

En posant $x = RC\omega$.

On retrouve bien les comportements asymptotiques en basse et haute fréquence prévus par l'étude qualitative. Le diagramme de Bode en gain présente donc deux asymptotes horizontales à $G_{db} = 0$.

Étude de la phase :

En BF : le numérateur est réel et tend vers -1 par valeur supérieure donc la phase du numérateur ϕ_{num} tend vers π par valeur inférieure. Le dénominateur est équivalent à $1 + 2jx$, le cosinus et le sinus de la phase du dénominateur ϕ_{den} sont donc positifs et $\phi_{den} \rightarrow 0^+$. La phase globale $\phi = \phi_{num} - \phi_{den}$ tend donc vers π quand $\omega \rightarrow 0^+$.

En HF : la fonction de transfert est équivalente à $\underline{H} = \frac{1}{-1 + 2j/x}$. On a donc $\phi_{num} = 0$ et $\phi_{den} \rightarrow \pi^-$. La phase globale $\phi = \phi_{num} - \phi_{den}$ tend donc vers $-\pi$ quand $\omega \rightarrow +\infty$.

Le module de la fonction de transfert s'annule pour $x = 1$ donc s'agit bien d'un filtre coupe bande. L'étudiant doit ici se poser la question de la largeur de la bande éteinte que ne manquera pas de lui poser l'examinateur si cette dernière n'est pas abordée.

La bande éteinte est définie par $|\underline{H}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ c'est-à-dire $\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui conduit à la résolution de $x^2 \pm 2x - 1 = 0$, et donne finalement une bande éteinte $\Delta\omega = 2/RC$.

- c) Le montage de cette partie présente un 'T' dans la contre réaction, mais comme la borne - de l'amplificateur opérationnel est virtuellement à la masse le résultat de la question 1 s'applique également. Après calculs on obtient

$$\underline{H} = -\frac{1 + (jx)^2}{1 + jx + (jx)^2}$$

Le calcul de cette fonction de transfert n'est pas demandé puisque la question porte sur l'étude comparative des diagrammes de Bode en gain de chacun des montages grâce au logiciel. Toutefois, ces calculs justifient l'observation faite à l'aide du logiciel : le montage de la question 2.c est plus sélectif que celui de la question 2.b (Voir Figure 1). Le calcul de la bande éteinte du circuit 2.c conduit à $\Delta\omega = 1/RC$, c'est-à-dire à une bande éteinte moitié moins large que dans le cas du circuit 2.b.

Selon l'aisance que montre l'étudiant dans les calculs l'examinateur peut éventuellement demander le calcul de cette fonction de transfert et de la bande éteinte.

Dans tous les cas l'examinateur demandera une justification qualitative.

Le dénominateur du module de la fonction de transfert du 2.b est toujours plus élevé que le dénominateur du module de la fonction de transfert du 2.c. Par conséquent, pour une même pulsation autour de $1/RC$ $|H_{2a}|$ est systématiquement plus petit que $|H_{2c}|$ d'où une bande éteinte plus large. On peut éventuellement mentionner un facteur de qualité Q valant $1/2$ dans le cas 2.b et 1 dans le cas 2.c.

En outre, l'examinateur peut éventuellement utiliser le logiciel pour observer la tension de sortie pour différentes fréquences et différentes formes de la tension d'entrée et demander au candidat une interprétation des résultats obtenus.

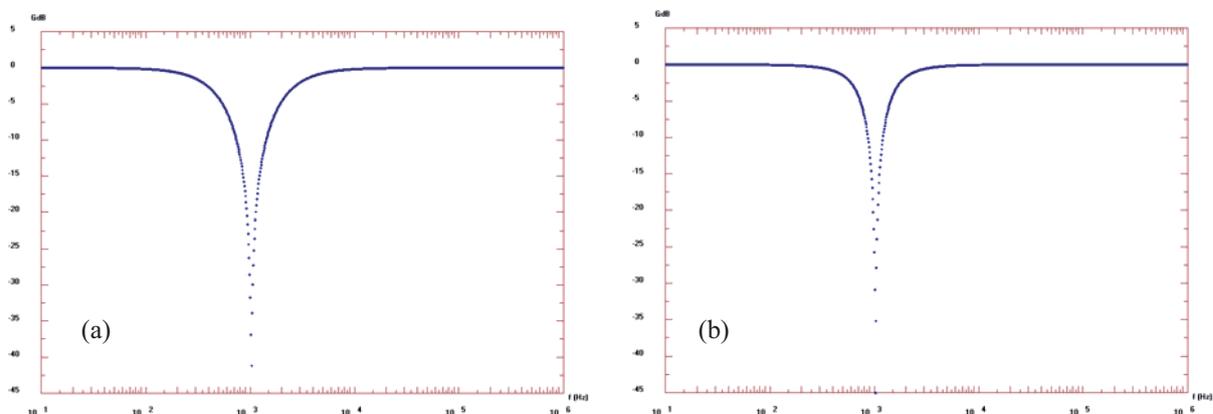


Figure 1 : Diagrammes de Bode en gain des montages étudiés : (a) question 2.b, (b) question 2.c.

3.

- a) De nouveau une étude qualitative faisant intervenir les impédances des condensateurs en BF et HF.

En BF les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. La contre réaction se réduit donc à deux résistances en série mais le courant en provenance de l'entrée est nul donc pas de chute de tension aux bornes des résistances et

$$S = V^- = V^+ = 0.$$

En HF les condensateurs sont équivalents à des court-circuits donc $S = V^- = V^+ = 0$.

Ce montage à donc un comportement asymptotique voisin de celui d'un filtre passe-bande.

- b) De nouveau utilisation du résultat de la question 1, puisque la borne - de l'amplificateur opérationnel est virtuellement à la masse, qui conduit à

$$\underline{H} = -\frac{jx}{1 + (jx)^2}$$

Le diagramme asymptotique de Bode en gain est constitué de deux droites de pentes +20 dB/décade en BF et -20 dB/décade en HF qui se coupent en $x = 1$, c'est-à-dire le diagramme asymptotique d'un filtre passe-bande.

Quant à la phase, elle varie entre $-\pi/2$ en BF et $\pi/2$ en HF.

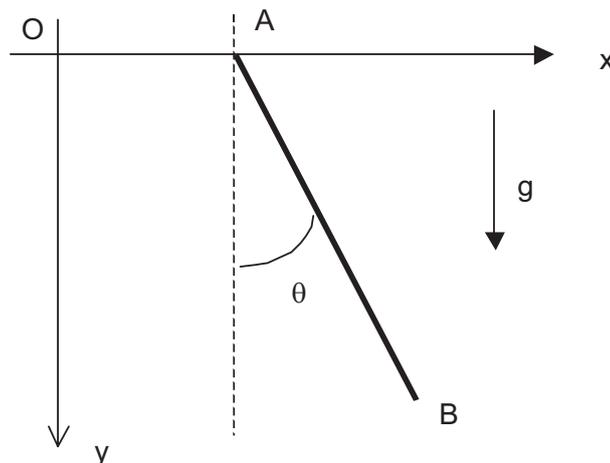
Toutefois, cette fonction de transfert ne peut pas correspondre à une fonction de transfert de filtre puisque $|H|$ tend vers l'infini lorsque $x = 1$.

Cependant, ce montage constitue un excellent auto-oscillateur à la pulsation $\omega_0 = 1/RC$.

Mécanique

Une tige AB homogène, de longueur $2l$ et de masse m , est mobile sans frottement autour de son extrémité A dans un plan vertical xOy . A est également mobile sans frottement sur l'axe horizontal Ox . A l'instant initial on abandonne AB sans vitesse et déviée d'un angle θ_0 par rapport à la verticale.

On prendra $g = 10 \text{ ms}^{-2}$, $m = 1 \text{ kg}$ et $l = 1 \text{ m}$. On rappelle que le moment d'inertie d'une barre homogène de masse m et de longueur $2l$ par rapport à un axe passant par son centre de gravité vaut $J_G = ml^2/3$.



1. Quelle est la trajectoire du centre de gravité G de AB ?
2. Établir une constante du mouvement. On posera $\omega_0^2 = 2g/l$.
3. En déduire une expression de la période T des oscillations de la barre sous forme d'une intégrale.
4. Le logiciel joint [Equadif, fichier i41039.eqd] trace les variations de $\theta(t)$ [noté $x(t)$] et de $\dot{\theta}(t)$ [notée $V(t)$] pour différentes valeurs de θ_0 [X_0]. À partir de quelle valeur de θ_0 peut on considérer que les oscillations sont « petites » ? Donner alors une estimation de la période du mouvement. Dans le logiciel il est possible de modifier les conditions initiales via le menu 'eQuation(s)' puis 'cond. Initiales'.
5. Retrouver la valeur inférieure de T en calculant directement la période des petites oscillations.
6. Donner l'expression de la réaction de l'axe en A et de la vitesse de déplacement de A sur l'axe Ox .

Solution

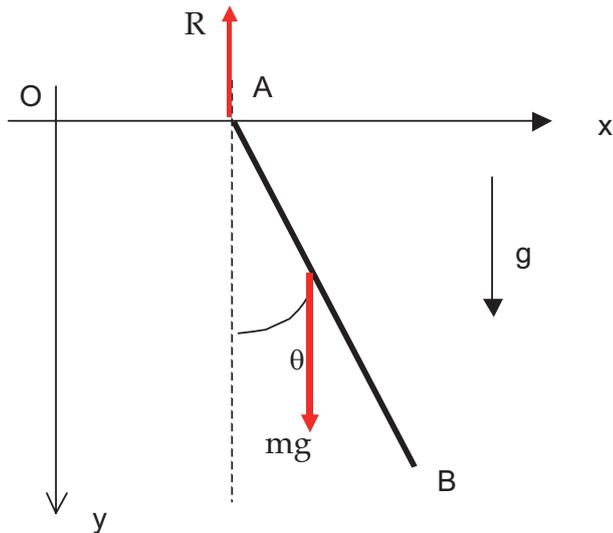
Les logiciels sont disponibles sur le site : <http://www.lgep.supelec.fr/index.php?page=scm-logiciels>

1. L'étudiant doit définir le système qu'il va étudier, définir des axes et leur orientation, par exemple en reprenant le schéma de l'énoncé, et représenter les forces agissant sur le système.

Le système à considérer est constitué de la barre seule. Les forces agissant sur la barre sont :

- La réaction de l'axe en A

- son poids appliqué au centre de gravité G au milieu de la barre. En outre elles sont toutes verticales puisqu'il n'y a pas de frottement en A.



La réponse à la question vient immédiatement : les forces étant toutes verticales la trajectoire de G ne peut être qu'un segment de droite vertical.

2. L'examineur attend de l'étudiant les réflexions suivantes

Le système ne possède qu'un seul degré de liberté, toutes les grandeurs pouvant s'exprimer en fonction de θ . L'absence de frottement garanti la conservation de l'énergie totale. Il est donc conseillé, puisqu'on demande une constante du mouvement, de dresser un simple bilan énergétique.

Énergie cinétique :

L'abscisse de G ne change pas et son ordonnée est donnée par $Y_G = l \cos(\theta)$. Sa vitesse est donc suivant l'axe Oy $V_G = -l \sin(\theta) \dot{\theta}$. L'application du théorème de Koenig conduit finalement à $E_c = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{1}{3} + \sin^2(\theta) \right) \dot{\theta}^2$.

Énergie potentielle :

Il faut tenir compte de l'orientation de l'axe Oy . On obtient $E_p = mgl \cos(\theta)$ à une constante près.

Il est facile de vérifier que si θ augmente l'énergie potentielle augmente aussi et que l'équation obtenue satisfait bien à cette contrainte.

L'énergie totale est égale à l'énergie fournie par les conditions initiales $E_c + E_p = -mgl \cos(\theta_0)$. Ce qui donne finalement l'intégrale première demandée

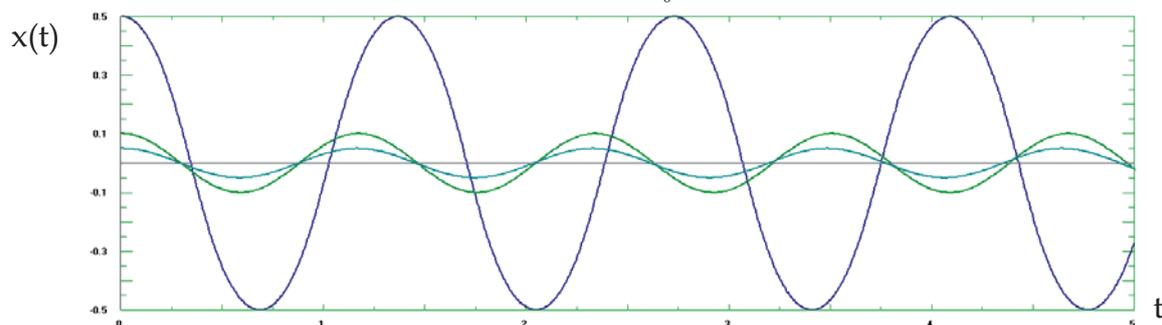
$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 \left(\frac{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}{\frac{1}{3} + \sin^2(\theta)} \right).$$

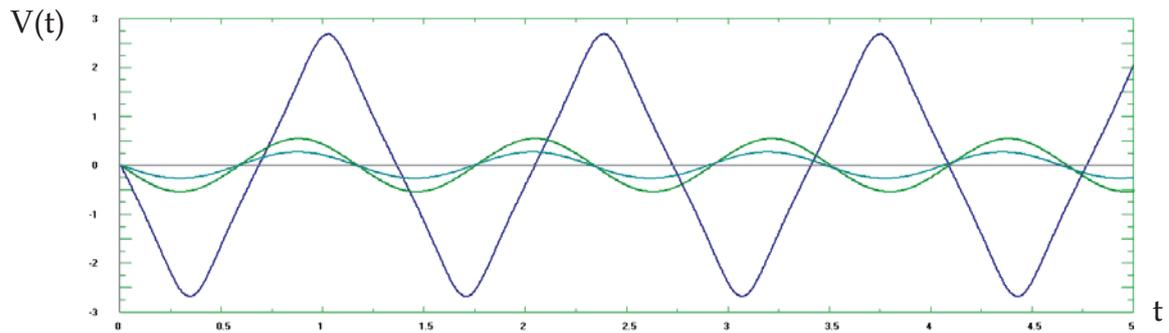
3. L'équation ci-dessus est à variables séparables ce qui conduit rapidement à

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{\frac{1}{3} + \sin^2(\theta)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} d\theta.$$

4. Dans cette question l'étudiant utilise le logiciel seul après que l'examineur lui a indiqué les fonctionnalités du programme dont il aura besoin.

Les tracés de $\theta(t)$ [$x(t)$] et de $\dot{\theta}(t)$ [$V(t)$] par le logiciel donnent pour $\theta_0 = 0.05, 0.1$ et 0.5 radians :





L'étudiant doit savoir que les 'petits' mouvements sont harmoniques donc caractérisés par une période qui ne dépend pas des conditions initiales et une dérivée qui doit aussi être une fonction harmonique. Il lui faut donc introduire des conditions initiales en accord avec ces contraintes pour observer des 'petits' mouvements. Il est bon ici de ne pas confondre 'harmonique' avec 'périodique' !

D'après les courbes il est clair que $\theta_0 = 0.5$ ne donne pas des variations harmoniques alors qu'il est possible que ce soit le cas avec $\theta_0 = 0.1$ ou encore $\theta_0 = 0.05$, conditions pour lesquelles la période évolue peu. On peut donc raisonnablement considérer que les 'petits' mouvements sont obtenus pour $\theta_0 \leq 0.1$. Une estimation de la période donne $T \approx 1.16$ s.

Pour cette estimation l'examineur attend de l'étudiant qu'il mesure le temps pour N périodes, ici $N = 4$ au maximum, et qu'il le divise par N , ceci afin de minimiser l'erreur de mesure.

5. Deux méthodes

a) Un développement limité au deuxième ordre de l'expression intégrale de T conduit à $T = \frac{4}{\omega_0} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} d\theta$

ce qui, après intégration en Arcsin, donne $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$

b) Une autre méthode, plus simple, consiste à dériver l'intégrale première trouvée, soit

$$\sin(\theta) \cos(\theta) l \dot{\theta}^2 + l \sin^2(\theta) \ddot{\theta} = -g \sin(\theta) - \frac{l}{3} \ddot{\theta}$$

qui devient, après un développement limité au premier ordre

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{l} \theta = 0$$

équation d'un mouvement harmonique de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$.

L'application numérique donne $T = 1.147$ s.

Il est conseillé à l'étudiant de chercher systématiquement des méthodes simples de résolution qui minimise les erreurs et font gagner du temps. Il est clair que la méthode b), probablement déjà connue et maîtrisée, est à favoriser ici. D'autant que certains résultats de cette méthode sont utiles dans la question suivante.

6. Cette partie utilise des résultats des questions précédentes qu'il est donc intéressant d'avoir conservés.

Réaction en A

On applique le principe fondamental de la dynamique en calculant l'expression de l'accélération de G à partir de V_G calculée au 2., ce qui donne

$$-m(\cos(\theta) l \dot{\theta}^2 + l \sin(\theta) \ddot{\theta}) = mg - R$$

En multipliant par $\sin(\theta)$ et en utilisant la relation trouvée au 5.b) on trouve finalement

$$R = \frac{ml}{3} \frac{\ddot{\theta}}{\sin(\theta)}$$

Vitesse du point A

Le point A est assujéti à ne se déplacer que sur l'axe Ox . On appelle x_a sa coordonnée sur cet axe. On a $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$, le vecteur \overrightarrow{OG} a donc pour coordonnée suivant Ox : $x_G = x_a + l \sin(\theta)$. La vitesse de G étant nulle suivant l'axe Ox (voir question 1.), on obtient finalement

$$\frac{dx_a}{dt} = -l \cos(\theta) \dot{\theta}.$$