Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière TSI

Calculatrices autorisées

Partie I - Développement limité d'une intégrale

On considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto x \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

I.A -

I.A.1) Déterminer avec soin l'ensemble de définition de f.

I.A.2) Étudier les variations de f sur cet ensemble.

I.A.3) Après avoir minoré $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-1,0\right[$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

I.A.4) Étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$ de la courbe représentant f.

I.B - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier relatif k tel que $k > -n$, les réels $x_k = \dfrac{k}{n}\cdot$

I.B.1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $y_k = \dfrac{k}{n}\left(\dfrac{1}{2n} + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}}{n+i}\right) + \frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}{2(n+k)}\right)$.

Montrer que y_k est une approximation de $f(x_k)$, en indiquant le principe de cette approximation (méthode des trapèzes). Il n'est pas demandé d'établir une majoration de l'erreur commise.

I.B.2) Établir une formule donnant, selon le même procédé, une approximation de $f(x_k)$ lorsque $-n < k < 0$. On notera encore y_k cette approximation.

I.B.3) Les entiers n et m strictement positif étant préalablement fixés, écrire en utilisant la syntaxe de *Maple* ou de *Mathematica* une suite d'instructions calculant les y_k pour $-n < k \leqslant m$.
Les instructions écrites devront minimiser le temps de calcul (en évitant les calculs répétés).

I.B.4) Lorsque $n = 4$ et $m = 8$, calculer effectivement les y_k et construire la représentation graphique de f sur $\left]-1,2\right]$. On admettra que les approximations $f(x_k) \simeq y_k$ résultant de ce choix de n sont suffisamment précises sur cet intervalle.

I.C -

I.C.1) Montrer qu'il existe une suite réelle $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k + o(x^n).$$

I.C.2) Calculer ce développement limité pour $n = 5$.

I.C.3) Pour $n \geqslant 2$, exprimer λ_n en fonction de n sous forme d'une somme.

I.C.4) Établir, pour tout $n \geqslant 1$, une expression de λ_{n+1} en fonction de n et λ_n.

I.C.5) Écrire, en utilisant la syntaxe de *Maple* ou de *Mathematica*, une suite d'instructions calculant, à partir d'une valeur entière $n \geqslant 2$ donnée, la partie régulière du développement limité d'ordre n de $f(x)$ en 0.

> *Les instructions devront calculer ce développement à l'aide des résultats obtenus ci-dessus sur les λ_n, sans recourir aux fonctions prédéfinies du logiciel concernant la dérivation ou les développements limités et en optimisant le temps de calcul.*

Partie II - Une équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle :

$$(1+x)\,y' = x\,y.$$

On note φ la solution de cette équation sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$ vérifiant $\varphi(0) = 1$.

II.A -

II.A.1) Justifier *a priori* (c'est-à-dire sans calcul) l'existence et l'unicité de φ.

II.A.2) Calculer explicitement $\varphi(x)$.

II.B - Pour montrer que φ est développable en série entière au voisinage de 0, on suppose d'abord qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un intervalle ouvert I contenant 0, tels que :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour tout } x \in I.$$

- version du 12 mars 2009 11h29

II.B.1) Montrer, à l'aide de l'équation différentielle $(1+x)\,y' = x\,y$, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie nécessairement, pour $n \geqslant 1$, une relation de récurrence entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1} que l'on explicitera, et préciser les valeurs numériques de a_0 et a_1.

II.B.2) Montrer que cette relation et les valeurs de a_0 et a_1 définissent une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que cette suite est bornée.

II.B.3) En déduire que φ est bien développable en série entière au voisinage de 0.

II.B.4) Montrer que pour $|x| > 1$, la série $\sum a_n x^n$ est divergente et en déduire le rayon de convergence de cette série entière.

II.C - À partir de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au II.B.2), on pose pour tout $n \geqslant 1$:

$$b_n = a_n + a_{n-1}.$$

II.C.1) Établir une relation entre b_n, b_{n+1} et n, puis calculer, pour tout $n \geqslant 1$, b_n en fonction de n.

II.C.2) En déduire, sous forme d'une somme, une expression de a_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 2$.

II.C.3) Si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est celle définie au I.C.1), démontrer la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \lambda_n = \frac{a_{n-2}}{n-1}.$$

II.D - On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\,u_{n+1} + n\,u_n - u_{n-1} = 0.$$

II.D.1) Écrire selon la syntaxe de *Maple* ou de *Mathematica* une fonction ou une procédure calculant, à partir de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u_n lorsque u_0 et u_1 sont donnés.

II.D.2) Montrer que E, muni des opérations usuelles sur les suites réelles, forme un espace vectoriel réel.

II.D.3) À l'aide de l'application de E vers $\mathbb{R}^2$ définie par : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$, démontrer que E est un plan vectoriel.

II.D.4) Déterminer l'ensemble des suites géométriques contenues dans E.

II.D.5) En utilisant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au II.B.2), déterminer une base de E et en déduire, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E, une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et $n \in \mathbb{N}$.

Partie III - Une équation différentielle d'ordre 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(x+1)\,y'' - x\left(x^2+2x+2\right)y' + \left(x^2+2x+2\right)y = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

III.A - Solutions polynomiales

III.A.1) Montrer que, si l'équation $(\mathscr{E})$ admet une solution polynomiale non nulle, celle-ci est de degré 1.

III.A.2) Déterminer toutes les solutions polynomiales de $(\mathscr{E})$.

III.B - Résolution de l'équation différentielle

III.B.1) À l'aide d'une des solutions trouvées au III.A.2), montrer que la résolution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}^*$ se ramène à la résolution de l'équation différentielle $(1+x)\,y' = x\,y$ étudiée dans la partie II.

III.B.2) En déduire, à l'aide de la fonction f de la partie I, une expression de la solution générale de $(\mathscr{E})$ sur chacun des intervalles $\left]-1,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$.

III.B.3) Déterminer toutes les solutions de l'équation $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$. L'équation $(\mathscr{E})$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ et, si oui, lesquelles ?

III.C - Solutions sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$

III.C.1) Quel est, selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre des solutions de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$ vérifiant : $y(0) = \alpha$?

III.C.2) Établir que, pour tout $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$, il existe une et une seule solution de $(\mathscr{E})$ sur $\left]-1,+\infty\right[$ vérifiant les conditions suivantes : $y'(0) = \beta$ et $y''(0) = \gamma$.

• • • FIN • • •