Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière TSI

Calculatrices autorisées

Dans tout le problème, (Π) est un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $P_1, \ldots, P_k$ sont k points de ce plan, **non contenus dans une même droite passant par O.**

On rappelle que, si une ellipse admet dans un certain repère orthonormal direct une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, son aire est égale à πab et les points qui sont à l'intérieur de cette ellipse sont ceux dont les coordonnées dans ce repère vérifient : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1$.

On note $(\overrightarrow{\Pi})$ le plan vectoriel euclidien engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

On dira qu'une ellipse est convenable si elle est centrée en O et si tous les points $P_1, \ldots, P_k$ sont à l'intérieur de l'ellipse ou sur l'ellipse elle-même (les axes d'une telle ellipse ne sont pas nécessairement dirigés par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$).

Une ellipse convenable sera dite optimale si son aire est inférieure ou égale à celle de toute autre ellipse convenable.

Le but du problème est de prouver qu'il existe une ellipse optimale, et une seule.

Pour n entier strictement positif, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles $n \times n$ et $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. Si A appartient à $M_n(\mathbb{R})$, on note $a_{i,j}$ le coefficient de A qui se trouve à la i-ème ligne et à la j-ème colonne.

Note : on identifie une matrice de $M_1(\mathbb{R})$ avec son unique élément $a_{1,1}$.

Partie I - Matrices symétriques

I.A - Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

I.A.1) Former le polynôme caractéristique de A.

I.A.2) En déduire la somme et le produit des deux valeurs propres (réelles ou complexes) de A en fonction de la trace de A et du déterminant de A.

I.A.3) On suppose de plus que A est symétrique. Démontrer que A admet deux valeurs propres réelles strictement positives si et seulement si son déterminant et sa trace sont strictement positifs.

Les résultats de la fin de cette partie I sont établis pour un entier n , $n \geqslant 2$ mais ne seront utilisés, dans la suite du problème, que pour $n = 2$.

I.B - Soit (i, j) un couple d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. On note $M_{i,j}$ la matrice, appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, dont tous les termes sont nuls, à l'exception de $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$ qui sont égaux à 1.

I.B.1) On suppose que $n = 3$.

a) Il y a 6 couples (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$. Écrire les 6 matrices $M_{i,j}$.

b) Démontrer que les 6 matrices précédentes forment une base de $S_3(\mathbb{R})$.

I.B.2) On revient au cas général : $n \geqslant 2$.

a) Combien y-a-t-il de matrices $M_{i,j}$?

b) Démontrer que tout $A \in S_n(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire des matrices $M_{i,j}$.

c) Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$?

I.C - On identifie tout élément de $\mathbb{R}^n$ à un vecteur colonne V à n lignes. On note ${}^tV$ le transposé d'un tel vecteur.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On lui associe la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall\, V \in \mathbb{R}^n,\ q(V) = {}^tVA\,V.$$

I.C.1) Pour V et V' dans $\mathbb{R}^n$, exprimer l'unique terme de ${}^tVA\,V'$ en fonction de $q(V)$, $q(V')$ et $q(V + V')$.

I.C.2) Pour i et j entiers, fixés entre 1 et n, comment choisir V et V' pour que l'unique terme de ${}^tVA\,V'$ soit égal à $a_{i,j}$?

I.C.3) Soient A_1 et A_2 deux matrices dans $S_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, on ait ${}^tVA_1\,V = {}^tVA_2\,V$. Démontrer que $A_1 = A_2$.

- version du 2 mars 2009 13h57

I.C.4) Soient A_1 et A_2 deux matrices dans $S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A_1 sont strictement positives et que pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, tel que ${}^tVA_1\,V = 1$, on ait aussi ${}^tVA_2\,V = 1$.

Soit $V \in \mathbb{R}^n$, V non nul.

a) Démontrer qu'il existe un vecteur W non nul tel que ${}^tVA_1\,V = {}^tW\,D\,W$, où D est la matrice diagonale ayant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme termes diagonaux.

b) En déduire que ${}^tVA_1\,V$ est un nombre réel strictement positif.

On note r^2 ce nombre.

c) En considérant ${}^t\left(\dfrac{V}{r}\right)\,A_1\,\dfrac{V}{r}$, montrer que ${}^tVA_1\,V = {}^tVA_2\,V$.

d) Démontrer que $A_1 = A_2$.

Partie II - Quelques propriétés de l'ellipse

À tout endomorphisme symétrique f de $(\overrightarrow{\Pi})$ on associe la courbe $\mathcal{C}_f$, ensemble des points M du plan Π tels que le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM})$ soit égal à 1.

II.A -

II.A.1) Démontrer qu'il existe une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$ de $(\overrightarrow{\Pi})$ telle que $\mathcal{C}_f$ admette, dans le repère $(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$, une équation de la forme $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$.

II.A.2) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ est une ellipse si et seulement si les valeurs propres de f sont deux réels strictement positifs.

II.B - Réciproquement, soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, dans le plan (Π).

II.B.1) Démontrer qu'il existe un endomorphisme f de $\overrightarrow{\Pi}$, symétrique et à valeurs propres strictement positives et tel que $\mathcal{E}$ soit la courbe $\mathcal{C}_f$ associée à f.

On pourra définir cet endomorphisme par sa matrice dans une base orthonormale directe bien choisie de $\overrightarrow{\Pi}$.

II.B.2) En utilisant le résultat de I.C-, montrer que cet endomorphisme est unique.

II.C - f étant un endomorphisme symétrique de $\overrightarrow{\Pi}$, on note M_f la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

II.C.1) Démontrer que les trois matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre dans $S_2(\mathbb{R})$.

II.C.2) En déduire qu'on peut associer à f un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que la matrice M_f s'écrive $M_f = \begin{pmatrix} \gamma - \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma + \alpha \end{pmatrix}$

II.C.3) Démontrer que f admet deux valeurs propres réelles et strictement positives si et seulement si le triplet (α, β, γ) associé à f vérifie les deux propriétés ci-dessous :

$$\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad \gamma > 0.$$

II.D - Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, dans le plan (Π) et f l'unique endomorphisme symétrique qui lui est associé (donc $\mathcal{E} = \mathcal{C}_f$).

Soit(α, β, γ) le triplet associé à f (donc associé à $\mathcal{E}$).

II.D.1) En se plaçant dans un repère particulier, montrer que les points qui sont à l'intérieur de $\mathcal{E}$ ou sur $\mathcal{E}$ elle-même sont les points M du plan tels que

$$\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) \leqslant 1.$$

II.D.2) En déduire que ce sont les points M du plan dont les coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ vérifient

$$(\gamma - \alpha)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 - 2\beta xy \leqslant 1,$$

II.D.3) En reprenant le repère particulier, exprimer l'aire de $\mathcal{E}$ en fonction de $\mathrm{Det}(f)$, déterminant de f dans une base orthonormale directe.

II.D.4) En déduire que cette aire est égale à $\dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}}$.

Partie III - Existence d'une ellipse optimale

III.A -

III.A.1) Justifier que, si les trois points O, P_i, P_j sont alignés, la suppression dans l'ensemble $\mathcal{L} = \{P_1, \dots, P_k\}$ de l'un (bien choisi) des deux points P_i ou P_j ne change pas l'ensemble des ellipses convenables.

On suppose donc que pour tous i et j distincts, O, P_i, P_j ne sont pas alignés.

III.A.2) Il en résulte que les points P_i sont tous distincts de O. À chaque point $P_i \in \mathcal{L}$ on attribue alors un couple (θ_i, ρ_i) de coordonnées polaires dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, avec $\rho_i > 0$.

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, associée à un triplet (α, β, γ) . Démontrer que P_i est à l'intérieur de $\mathcal{E}$ ou sur $\mathcal{E}$ elle-même si et seulement si

$$\gamma \leqslant \alpha \cos 2\theta_i + \beta \sin 2\theta_i + \frac{1}{{\rho_i}^2}$$

III.A.3) Quelle est la position de P_i quand cette inégalité est une égalité ?

III.B - Démontrer qu'il existe au moins une ellipse convenable.

Dans la suite de cette partie, $\mathcal{E}_0$ est une ellipse convenable quelconque, fixée définitivement, associée au triplet $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

III.C -

III.C.1) Démontrer que pour tout $r \geqslant 1$, le triplet $(\alpha_0, \beta_0, r\gamma_0)$ est associé à une ellipse $\mathcal{E}_1$ de centre O, d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_0$.

III.C.2) Démontrer qu'on peut, de plus, choisir r de sorte que cette ellipse $\mathcal{E}_1$ soit convenable et passe par l'un des points $P_1, \ldots, P_k$.

On suppose, quitte à réordonner les points $P_1, \ldots, P_k$, que ce point est P_1 et que l'on a choisi la base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de sorte que $\theta_1 = 0$.

On note $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ le triplet $(\alpha_0, \beta_0, r\gamma_0)$ associé à $\mathcal{E}_1$.

III.D -

III.D.1) Démontrer que, pour tout $\lambda \geqslant 0$, le triplet $(\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1 + \lambda)$ est associé à une ellipse $\mathcal{E}_2$, de centre O, passant par P_1 et dont l'aire est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_1$.

III.D.2) Démontrer que $1 - \cos(2\theta_i)$ est strictement positif pour tout i de 2 à k.

III.D.3) Démontrer qu'on peut, de plus, choisir λ de sorte que $\mathcal{E}_2$ soit convenable et passe par l'un des points $P_2, \ldots, P_k$.

On suppose, quitte à réordonner les points $P_2, \ldots, P_k$, que $\mathcal{E}_2$ passe par P_2.

On note $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ le triplet $(\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1 + \lambda)$ associé à $\mathcal{E}_2$.

III.E - On étudie l'ensemble des triplets (α, β, γ) qui vérifient

$$\gamma = \alpha \cos 2\theta_i + \beta \sin 2\theta_i + \frac{1}{{\rho_i}^2} \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2.$$

III.E.1) Démontrer que ce sont les triplets de la forme $\big(g(\beta), \beta, h(\beta)\big)$, où g et h sont deux fonctions que l'on précisera.

III.E.2) Démontrer que, pour un tel triplet, $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ est une fonction du second degré de β, dont le terme de plus haut degré est $-\beta^2$.

III.E.3) Démontrer qu'un tel triplet est associé à une ellipse convenable d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si β appartient à un certain intervalle fermé borné non vide (que l'on ne demande pas de préciser).

III.E.4) En déduire que, parmi les ellipses convenables passant par P_1 et P_2, il en existe une d'aire minimale.

III.F - Déduire de ce qui précède qu'il existe une (au moins) ellipse optimale et qu'elle passe par deux (au moins) des points P_i.

Partie IV - Unicité de l'ellipse optimale

Pour pouvoir raisonner géométriquement, on interprète (α, β, γ) comme les coordonnées d'un point d'un espace rapporté à un repère orthonormal $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ (il n'y a aucun lien entre cet espace et le plan (Π)).

On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des points de cet espace dont le triplet (α, β, γ) des coordonnées est associé à une ellipse convenable.

Pour la commodité du langage, on suppose que l'axe $(\Omega, \overrightarrow{K})$ est vertical ascendant ; on pourra donc utiliser les mots « au-dessus » et « au-dessous » pour situer un point par rapport à une surface, afin d'en déduire une description géométrique d'une partie de l'espace.

IV.A - Soit $\mathcal{H}_0$ la surface d'équation $Z^2 = X^2 + Y^2$ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$

IV.A.1) Quelles sont ses sections par les plans d'équations $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = 1$?

IV.A.2) Quelle est la nature de $\mathcal{H}_0$?

On note $\mathcal{H}_0^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}_0$ qui vérifient $Z \geqslant 0$.

IV.A.3) Donner, sans justification, la position par rapport à $\mathcal{H}_0^+$ des points tels que le triplet (α, β, γ) soit associé à une ellipse.

IV.B - Pour i entre 1 et k, on note $\mathcal{T}_i$ la surface d'équation

$$Z = X \cos 2\theta_i + Y \sin 2\theta_i + \frac{1}{{\rho_i}^2} \text{ dans le repère } (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$$

IV.B.1) Quelle est la nature de $\mathcal{T}_i$?

IV.B.2) Donner sans justification la position par rapport à $\mathcal{T}_i$ des points de l'espace qui vérifient la relation $Z \leqslant X \cos 2\theta_i + Y \sin 2\theta_i + \frac{1}{{\rho_i}^2}$.

IV.C -

IV.C.1) Déduire de ce qui précède une description géométrique de l'ensemble $\mathcal{K}$.

IV.C.2) Justifier que si deux points M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{K}$, le milieu du segment M_1M_2 appartient à $\mathcal{K}$.

Dans la suite de cette partie, ℓ est un réel strictement positif. On note $\mathcal{H}_\ell$ la surface d'équation

$$Z^2 - X^2 - Y^2 = \ell.$$

et ${\mathcal{H}_\ell}^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}_\ell$ qui vérifient $Z > 0$.

IV.D -

IV.D.1) Quelles sont les sections de $\mathcal{H}_\ell$ par les plans d'équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \sqrt{\ell}$, $Z = 2\sqrt{\ell}$?

IV.D.2) Quelle est la nature de $\mathcal{H}_\ell$? On demande une réponse précise mais sans justification.

IV.D.3) Représenter la partie de $\mathcal{H}_\ell$ comprises entre les plans $Z = 0$ et $Z = 2\sqrt{\ell}$.

IV.E - Soient M_1 et M_2 deux points différents de ${\mathcal{H}_\ell}^+$, M_3 le milieu du segment M_1M_2 et $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les coordonnées de M_3.

IV.E.1) Donner, sans justification, la position de M_3 par rapport à ${\mathcal{H}_\ell}^+$.

IV.E.2) En déduire que ${\gamma_3}^2 - {\alpha_3}^2 - {\beta_3}^2 > \ell$.

IV.F - Déduire de ce qui précède que l'ellipse optimale est unique.

Partie V - Exemples

V.A - On suppose ici que l'ensemble $\mathcal{L} = \{P_1, \dots, P_k\}$ admet un axe de symétrie Δ passant par O.

V.A.1) En utilisant le résultat de la partie IV, montrer que Δ est également axe de symétrie pour l'ellipse optimale.

V.A.2) Application : On suppose que $k = 2$ et que les coordonnées de P_1 et P_2 dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont respectivement $(2, 1)$ et $(2, -1)$.

a) Justifier que l'équation dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de l'ellipse optimale est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

b) Déterminer a et b.

V.B - On suppose ici que $k = 4$ et que P_1, P_2, P_3, P_4 ont respectivement pour coordonnées $(3, 0)$, $(3, \sqrt{3})$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

V.B.1) Justifier qu'on peut supprimer le point P_4.

V.B.2) Donner un système de coordonnées polaires pour P_1, P_2, P_3.

V.B.3) Comment s'écrivent ici les trois inégalités du III.A.2) ?

V.B.4) Démontrer qu'il n'existe pas d'ellipse de centre O, passant par P_1 et P_3 et contenant P_2.

On admet que, de même, il n'existe pas d'ellipse de centre O, passant par P_2 et P_3 et contenant P_1.

V.B.5) Exprimer $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ en fonction de β lorsque les deux premières inégalités du III.A.2) sont des égalités.

V.B.6) Pour quelle valeur de β cette fonction est-elle maximale ?

V.B.7) Donner une équation cartésienne de l'ellipse optimale et la tracer en s'aidant, par exemple, de la calculatrice.

• • • FIN • • •