Epreuve Maths 2, **filière MP**: **quelques sujets posés en 2010**.

Sujet 1.

Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, croissante et non majorée, avec $\beta_0 \geq 1$. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par:

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{\beta_n}$$

1. Justifier que, si pour tout entier n: $u_n > \beta_n$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   Montrer que s'il existe un entier k tel que $u_k \leq \beta_k$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite nulle.
2. En déduire l'existence d'un élément $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que:
   $$\left(u_0 < \lambda \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right) \text{ et } \left(u_0 > \lambda \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$$
3. Pour cette question, on suppose $\beta_n = \sqrt{n+1}$ pour tout n. A l'aide du logiciel de calcul formel, justifier rigoureusement le comportement de la suite pour certaines valeurs de u_0 et en déduire un minorant de λ.
4. On introduit maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$$
   Exprimer v_n en fonction de v_0 et des termes de la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On suppose qu'il existe $\rho > 1$ tel que $\beta_n = O(\rho^n)$ quand n tend vers $+\infty$. Justifier que $\lambda \in \mathbb{R}$ et donner son expression sous la forme d'une somme de série.
6. On reprend le cas particulier de la question 3. Donner à l'aide du logiciel de calcul formel une valeur approchée de λ.
   Déterminer un entier n tel que la somme partielle d'ordre n de la série précédente donne une valeur approchée de λ à 10^{-4} près.

Sujet 2.

1. Utiliser le logiciel de calcul formel pour exprimer, pour tout couple d'entiers $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, la valeur de l'intégrale :
   $$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$
   à l'aide des factorielles $n!$, $m!$ et $(n+m+1)!$.
2. Soient a et b deux réels. a. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{a\,n+b}{\binom{3n}{n}.2^n}$ est convergente.
   b. Démontrer à l'aide de la question 1., l'existence d'un polynôme $P_{a,b}$ à préciser tel que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a\,n+b}{\binom{3n}{n}.2^n} = \int_0^1 \frac{P_{a,b}(x)}{(x-2)^3(x^2+1)^3}dx$$
   On pourra utiliser le logiciel de calcul formel pour le calcul de certaines sommes de séries.
3. A l'aide du logiciel de calcul formel, déterminer alors deux réels rationnels a et b tels que:
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a\,n+b}{\binom{3n}{n}.2^n} = \pi$$

Sujet 3.

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'(x) = \sin x - y(x)^3$.

1. a. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale y de (E) telle que $y(a) = b$. Que dire de son intervalle de définition J ? Que dire de deux solutions maximales y_1, y_2 vérifiant respectivement $y_1(a) = b$ et $y_2(a+2\pi) = b$?
   b. Avec le logiciel de calcul formel, tracer simultanément les graphes des solutions telles que $y(-1) = k/5$ avec $k = -5, -4, \ldots, 5$, d'abord sur $[-1,5]$ puis sur $[-1,15]$.
2. Dans cette question, y est une solution maximale de (E), définie sur l'intervalle J. On veut établir que $\sup J = +\infty$. Soit $a \in J$ et $b = y(a)$.
   a. Montrer que si $b > 1$, il existe $a' > a$ tel que $y(a') = 1$ (raisonner par l'absurde). Enoncer une propriété analogue si $b < -1$.
   b. Montrer que si $b = 1$, alors y est strictement décroissante au voisinage de a. Enoncer une propriété analogue si $b = -1$.
   c. Montrer que si $|b| < 1$, alors $|y(x)| < 1$ pour tout $x \in J \cap [a, +\infty[$. Montrer alors que $\sup J = +\infty$ (observer que y est lipschitzienne sur $J \cap [a, +\infty[$)
   d. Conclure que dans tous les cas, $\sup J = +\infty$ et qu'il existe x_0 tel que $|\, y(x)\, | < 1$ pour $x > x_0$.
3. On va établir l'existence d'une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On note φ l'application qui à $b \in [-1,1]$ associe la valeur en $x = 2\pi$ de la solution maximale de (E) telle que $y(0) = b$.
   a. On admet que la fonction φ vérifie: $|\varphi(b_2) - \varphi(b_1)| < |b_2 - b_1|$ pour tous b_1, b_2 distincts dans $[-1,1]$. Montrer que φ possède un unique point fixe b_0 dans $[-1,1]$
   b. On note y_0 la solution maximale de (E) telle que $y_0(0) = b_0$. Montrer que y_0 est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est 2π-périodique.
   c. A l'aide du logiciel de calcul formel, donner une valeur approchée de b_0 et tracer le graphe de y_0 sur un intervalle "assez large" de part et d'autre de 0.

Sujet 4.

On considère dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, un arc Γ de classe C^1 et régulier, paramétré par une abscisse curviligne s, $M\ :\ s \in \mathbb{R} \mapsto M(s) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout s de $\mathbb{R}$, on note $G(s)$ le centre de gravité de l'arc $\overset{\frown}{M(0)M(s)}$, défini ainsi :

$$\forall s \in \mathbb{R}^*,\ G(s) = \frac{1}{s}\int_0^s M(u)\, du;\ \text{et } G(0) = M(0)$$

Soit alors Δ l'arc paramétré par $G\ :\ s \in \mathbb{R} \mapsto G(s)$.

1. Dans cette question, Γ est l'arc paramétré par $N(t) = (t, \cosh t)$ où $\cosh t$ est le cosinus hyperbolique de t. Calculer son abscisse curviligne s nulle en $t = 0$ et paramétrer Γ par s. En déduire les coordonnées de $G(s)$. Tracer sur un même graphique les supports de Γ et Δ.
2. On suppose dans cette question que l'arc Γ est paramétré par $N(t) = (t, f(t))$ où la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et de classe C^1.
   a. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que: $y \geq f(x) \iff \forall u \in \mathbb{R},\ y \geq f'(u)(x-u) + f(u)$.
   b. En déduire que le support de l'arc Δ est "au-dessus" du support de Γ.
3. Reprendre les questions posées au 1. avec l'arc Γ paramétré par $N(t) = (\cos t, \sin t)$.
4. On suppose dans cette question que la fonction M est périodique de période $L > 0$.
   a. Montrer que $G(s)$ converge vers un point Ω lorsque s tend vers $+\infty$.
   b. Que représente Ω pour le support de Γ ? Montrer que Ω est un point multiple de l'arc Δ.
   c. Avec l'exemple de la question 3., compléter le graphique des supports de Γ et Δ par celui des segments de droite $(M(s)G(s))$ pour $s = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ et π. Emettre une conjecture puis la démontrer dans le cas général.

Sujet 5.

Soit p un nombre premier. Pour tout entier $k \in \{1,\dots,p-1\}$, on pose:

$$p_k = \frac{(p-1)!}{k(p-k)} .$$

1. Cette question est à traiter à l'aide du logiciel de calcul formel. Les instructions `ithprime` ou `isprime` de Maple et `Prime[.]` de Mathematica peuvent être utiles.
   a. Etudier la divisibilité de l'entier $\sum_{k=1}^{p-1} p_k$ par p pour les 20 premiers nombres premiers.
   b. On note $\frac{a_p}{b_p}$ la fraction irréductible représentant le rationnel $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$. Etudier la divisibilité de a_p par p^2 pour les 20 premiers nombres premiers.
2. On suppose que le nombre premier p est supérieur ou égal à 5 et on se place dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note $\overline{k}$ la classe d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   a. Montrer que $\overline{(p-1)!} = -1$.
   b. Montrer que pour tout $k \in \{1,\dots,p-1\}$, on a: $\overline{p_k} = \left(\overline{k^2}\right)^{-1}$.
   c. Montrer que: $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\overline{k^{-1}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\overline{k}\right)^2$. Conclure quant à la divisibilité de $\sum_{k=1}^{p-1} p_k$ par p .
3. On rappelle que $\frac{a_p}{b_p}$ est la fraction irréductible représentant le rationnel $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$.

   Exprimer $p\, b_p \sum_{k=1}^{p-1} p_k$ en fonction de a_p. Qu'en conclut-on ?

Sujet 6.

On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on définit la suite $T\,u = v$ par: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$.

1. On définit ainsi un endomorphisme T de E. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer $\ker(T - \lambda\, id_E)^2$.
3. Soit F le sous-espace vectoriel de E ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(u_0,u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{C}^4$ et vérifiant la relation de récurrence:
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = 6\,u_{n+3} - 13\,u_{n+2} + 12\,u_{n+1} - 4\,u_n .$$
   a. Montrer qu'il existe deux scalaires λ_1, λ_2 tels que $F = \ker(T - \lambda_1 id_E)^2 \oplus \ker(T - \lambda_2 id_E)^2$.
   b. En déduire une méthode de calcul de u_n pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à F.
   c. Expliciter u_n lorsque $(u_0,u_1,u_2,u_3) = (1,-1,1,-1)$.
4. Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à F, on note V_n le vecteur colonne $V_n = {}^t(u_n,u_{n+1},u_{n+2},u_{n+3})$.
   Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que: $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = M\,V_n$.
   A l'aide du logiciel de calcul formel, déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de M. Calculer alors M^n pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de I_4, M, M^2, M^3.
   En déduire une autre méthode pour déterminer les éléments de F.

Sujet 7.

Soit $A : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $B : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$$

1. On demande de résoudre cette question avec le logiciel de calcul formel. Ici $n = 2.$ On définit la fonction $B : t \mapsto \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & t \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation différentielle $A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$ d'inconnue $A : t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Que dire des valeurs propres de $A(t)$? Calculer la trace $Tr(A(t)^k)$ des matrices $(A(t))^k$ pour $k = 1,\ldots,5$.
2. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ une liste de valeurs propres de U répétées avec multiplicité. Pour $p = 1,\ldots,n$, on définit les quantités: $\sigma_p(U) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_p}$ et $S_p(U) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^p$. On **admet** alors les relations générales suivantes (où on a noté S_k et σ_k au lieu de $S_k(U)$ et $\sigma_k(U)$), pour $p = 1,\ldots,n$: $S_p + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \sigma_k S_{p-k} + (-1)^p p\sigma_p = 0$.
   Démontrer que si $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie pour tout $k = 1,\ldots,n$: $Tr(U^k) = Tr(V^k),$ alors $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ est aussi une liste de valeurs propres de V (autrement dit, U et V ont mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités)
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*.$ Montrer que l'application $t \mapsto A(t)^k$ est dérivable et que sa dérivée s'exprime à l'aide de $A(t)^k$ et $B(t)$.
4. a. Qu'en déduit-on pour l'application $t \mapsto Tr(A(t)^k)$, $k \in \mathbb{N}^*$?
   b. Que conclure pour les valeurs propres (réelles ou complexes) de $A(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

Sujet 8.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle et telles que ${}^tM = M^2$.

1. a. Lorsque $n = 2$, déterminer à l'aide du logiciel de calcul formel l'ensemble $\mathcal{E}_2$; vérifier qu'il est constitué de deux matrices M_1, M_2.
   b. Retrouver ces matrices par le calcul.
   c. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP\, M_1\, P = M_2$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_3$ est vide.
3. Montrer à l'aide du logiciel de calcul formel que la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}_4$.
4. a. Montrer que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ≥ 2, sans valeur propre réelle, admet au moins un plan stable.
   b. Soit E un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace stable par un endomorphisme u dont l'adjoint u^* vérifie $u^* = u^2.$ Montrer que l'orthogonal de F est aussi stable par u.
   c. Montrer, lorsque $n = 4,$ que pour toute matrice $M \in \mathcal{E}_4,$ il existe $P \in O_4(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP\, M\, P = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
   d. Expliciter une telle matrice P pour la matrice A de la question 3. Vérifier le résultat avec le logiciel.