MATHÉMATIQUES II

Les calculatrices sont autorisées

Notations :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.
- On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Partie I -

I.A - On fixe une application φ de E^2 dans $\mathbb{K}$. On suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\varphi(x + \alpha y, z) = \varphi(x, z) + \alpha\varphi(y, z)$ et $\varphi(x, z) = \varphi(z, x)$.

I.A.1) Pour tout élément x de E, on note $h(x)$ l'application de E dans E telle que $\forall y \in E$, $h(x)(y) = \varphi(x, y)$.

a) Montrer que, pour tout x de E, $h(x)$ est élément du dual de E, noté E^*.

b) Montrer que h est une application linéaire de E dans E^*.

I.A.2) Si A est une partie de E, on note $A^{\perp\varphi} = \{x \in E / \forall a \in A\ \varphi(x, a) = 0\}$. Montrer que $A^{\perp\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera $A^{\perp}$ au lieu de $A^{\perp\varphi}$.

I.A.3) On dit que φ est non dégénérée si et seulement si $E^{\perp\varphi} = \{0\}$.

Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si h est un isomorphisme.

I.A.4) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On note $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e.

a) Montrer que la matrice de h dans les bases e et e^* est :

$$\mathrm{mat}(h, e, e^*) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Cette dernière matrice sera également appelée la matrice de φ dans la base e et notée $\mathrm{mat}(\varphi, e)$

b) Soit $(x, y) \in E^2$. On note X et Y les matrices colonnes dont les coefficients sont les composantes de x et y dans la base e.

Montrer que $\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y$ où $\Omega = \mathrm{mat}(\varphi, e)$ et où ${}^tX$ désigne la matrice ligne obtenue en transposant X.

Filière MP

I.B - Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, on note q_φ l'application de E dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in E$, $q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$. On dit que q_φ est la forme quadratique associée à φ. On note $Q(E)$ l'ensemble des q_φ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

I.B.1) Soit $q \in Q(E)$.

Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur E, notée φ, telle que $q = q_\varphi$. On dira que φ est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q. On dira que q est non dégénérée si et seulement si φ est non dégénérée. Si e est une base de E, on notera $\mathrm{mat}(q, e) = \mathrm{mat}(\varphi, e)$. On l'appellera la matrice de q dans la base e.

I.B.2) Soit q une forme quadratique sur E. Soit E' un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et soit q' une forme quadratique sur E'.
On appelle isométrie de (E, q) dans (E', q') tout isomorphisme f de E dans E' vérifiant : pour tout $x \in E$, $q'(f(x)) = q(x)$. On dira que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie de (E, q) dans (E', q').
Montrer que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une base e de E et une base e' de E' telles que $\mathrm{mat}(q, e) = \mathrm{mat}(q', e')$.

I.B.3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $c = (c_1, \ldots, c_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$.

Pour tout $x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{K}^{2p}$, on pose $q_p(x) = 2 \sum_{i=1}^{p} x_i x_{i+p}$.

a) Montrer que q_p est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^{2p}$ et calculer $\mathrm{mat}(q_p, c)$.

b) On appelle *espace de Artin (ou espace artinien)* de dimension $2p$ tout couple (F, q), où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2p$, et où q est une forme quadratique sur F telle que (F, q) et $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$ sont isométriques.
Montrer que dans ce cas, q est non dégénérée.
Lorsque $p = 1$, on dit que (F, q) est un plan artinien.

c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tout

$$x = \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbb{C}^{2p}, \text{ on pose } q(x) = \sum_{k=1}^{2p} x_k^2$$

Montrer que $(\mathbb{C}^{2p}, q)$ est un espace de Artin.

d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour tout

$$x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{R}^{2p}, : \text{on pose } q'(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} x_i^2 .$$

Montrer que $(\mathbb{R}^{2p}, q')$ est un espace de Artin.

e) Si (F, q) est un espace de Artin de dimension $2p$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de F de dimension p tel que la restriction de q à G est identiquement nulle.

Partie II -

Pour toute la suite de ce problème, on suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, et on note q sa forme quadratique.

II.A -

II.A.1) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note encore $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e. Soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. On note F l'espace engendré par $e_1, \ldots, e_p$.

a) Montrer que $F^\perp$ est l'image réciproque par h de $\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*)$, où h est définie au I.A.1.

b) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

c) Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.

II.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II.A.3) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note φ_F la restriction de φ à F^2. On dira que F est singulier si et seulement si φ_F est dégénérée.
Montrer que F est non singulier si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $F \cap F^\perp = \{0\}$;
- $E = F \oplus F^\perp$;
- $F^\perp$ est non singulier.

II.A.4) On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(x,y) \in F \times G$, $\varphi(x, y) = 0$.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et non singuliers, montrer que $F \oplus G$ est non singulier.

II.B - Soit q' une seconde forme quadratique sur E dont la forme bilinéaire symétrique associée est notée φ'. Comme au I.A.1, on note, pour tout $(x,y) \in E^2$, $h(x)(y) = \varphi(x,y)$ et $h'(x)(y) = \varphi'(x,y)$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On dit que e est q-orthogonale si et seulement si, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

II.B.1) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x,y) = x^2 - y^2$ et $q'(x,y) = 2xy$.

Déterminer une base q-orthogonale et une base q'-orthogonale.

II.B.2) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et pour q' définies à la question II.B.1 ?

II.B.3) Supposons que e est à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.
Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i est un vecteur propre de $h^{-1} \circ h'$.

II.B.4) On suppose que $h^{-1} \circ h'$ admet n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour q'.

II.C -

II.C.1) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ et tel que $x \neq 0$.

On se propose de démontrer qu'il existe un plan $\Pi \subset E$ contenant x et tel que $(\Pi, q_{/\Pi})$ soit un plan artinien (où $q_{/\Pi}$ désigne la restriction de l'application q au plan Π).

a) Démontrer qu'il existe $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) = 1$

b) On pose $y = z - \frac{q(z)}{2}x$. Calculer $q(y)$.

c) Conclure.

II.C.2) Soit F un sous-espace vectoriel singulier de E. On suppose que $(e_1, \dots, e_s)$ est une base de $F \cap F^{\perp}$. On note G un supplémentaire de $F \cap F^{\perp}$ dans F.

a) Montrer que G est non singulier.

b) Démontrer par récurrence sur la dimension de $F \cap F^{\perp}$ (en commençant par $\dim(F \cap F^{\perp}) = 1$, puis $\dim(F \cap F^{\perp}) > 1$) qu'il existe s plans $P_1, \dots, P_s$ de E tels que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

1) Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $(P_i, q_{/P_i})$ est un plan artinien contenant e_i

2) Pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, s\}^2$ avec $i \neq j$, P_i est orthogonal à P_j.

3) Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, P_i est orthogonal à G.

II.C.3) Montrer que $\overline{F} = G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ est non singulier.
On dira que $\overline{F}$ est un complété non singulier de F.

II.C.4) Montrer que si $q_{/F} = 0$, alors $\dim(F) \leq \frac{n}{2}$.

II.C.5) On suppose que $n = 2p$. Montrer que (E,q) est un espace de Artin si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension p tel que $q_{/F} = 0$.

Partie III -

On note $O(E, q)$ l'ensemble des isométries de (E, q) dans lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes f de E vérifiant :

pour tout $x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$.

III.A -

III.A.1) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si, pour tout $(x,y) \in E^2$: $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E et si $f \in O(E, q)$, alors $f(F^{\perp}) = (f(F))^{\perp}$.

b) Soit e une base de E. Calculer la matrice de la forme bilinéaire :

$(x,y) \mapsto \varphi(f(x), f(y))$ en fonction de $\operatorname{mat}(f, e)$ et de $\operatorname{mat}(\varphi, e)$.

c) Posons $M = \operatorname{mat}(f, e)$ et $\Omega = \operatorname{mat}(\varphi, e)$.

Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si $\Omega = {}^tM\Omega M$.

d) Montrer que si $f \in O(E, q)$, alors $\det(f) \in \{1, -1\}$. On notera :

$$O^{+}(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = 1\} \text{ et } O^{-}(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = -1\}.$$

III.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

a) Montrer que $s \in O(E, q)$ si et seulement si F et G sont orthogonaux (pour φ).

b) En déduire que les symétries de $O(E, q)$ sont les symétries par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, où F est un sous-espace non singulier de E.

c) Lorsque H est un hyperplan non singulier, on appellera réflexion selon H la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^{\perp}$. Montrer que toute réflexion de E est un élément de $O^{-}(E, q)$.

d) Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $q(x) = q(y)$ et $q(x - y) \neq 0$.

On note s la réflexion selon $H = \{x - y\}^{\perp}$. Montrer que $s(x) = y$.

III.B -

III.B.1) Supposons que E est un espace artinien de dimension $2p$ et que F est un sous-espace de E de dimension p tel que $q/_F = 0$.

Si $f \in O(E, q)$ avec $f(F) = F$, montrer que $f \in O^{+}(E, q)$.

III.B.2) Soit F un sous-espace de E tel que $\overline{F} = E$ (où $\overline{F}$ est un complété non singulier de F). Montrer que si $f \in O(E, q)$ avec $f/_F = \mathrm{Id}_F$ (où Id_F est l'application identité de F dans F), alors $f \in O^{+}(E, q)$.

III.B.3) Soit $f \in O(E,q)$. On suppose que pour tout $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, on a $f(x) - x \neq 0$ et $q(f(x)-x) = 0$.
On se propose de démontrer que $f \in O^+(E,q)$ et que E est un espace de Artin.

a) Montrer que $\dim(E) \geq 3$.

b) On note $V = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $q/_V = 0$.

c) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. Notons $H = \{x\}^\perp$. Montrer que $q/_H$ n'est pas identiquement nulle.
En déduire qu'il existe $y \in E$ tel que $q(x+y) = q(x-y) = q(y) \neq 0$.

d) On note $U = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $q/_U = 0$.

e) Montrer que $U^\perp = V = U$.

f) En déduire que E est un espace de Artin et que $f \in O^+(E,q)$.

Partie IV -

IV.A - On souhaite démontrer le *théorème de Cartan-Dieudonné*, dont voici l'énoncé : « si $f \in O(E,q)$, f est la composée d'au plus n réflexions, où $n = \dim(E)$, en convenant que Id_E est la composée de 0 réflexion.»

IV.A.1) Montrer le théorème de Cartan-Dieudonné lorsque $n = 1$. On veut ensuite raisonner par récurrence. On suppose donc que $n > 1$ et que le théorème de Cartan-Dieudonné est démontré en remplaçant E par tout espace vectoriel de dimension $n-1$.

IV.A.2) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$ avec $q(x) \neq 0$.

IV.A.3) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $q(f(x)-x) \neq 0$.

IV.A.4) Conclure dans les autres cas.

IV.B - On se propose de démontrer le *théorème de Witt*, dont voici l'énoncé : « soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E tels qu'il existe une isométrie f de $(F, q/_F)$ dans $(F', q/_{F'})$ (la définition d'une isométrie a été donnée au I.B.2). Alors il existe $g \in O(E,q)$ telle que $g/_F = f$.»

IV.B.1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où F et F' sont non singuliers.

IV.B.2) On suppose que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') = 1$. Soit $x \in F$ avec $x \neq 0$. Posons $y = f(x)$.

a) Montrer que $q(x+y)$ ou $q(x-y)$ est non nul.

b) Montrer le théorème de Witt dans ce cas, en utilisant la question III.A.2-d).

IV.B.3) On suppose maintenant que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') > 1$.

a) Montrer qu'il existe F_1 et F_2 non singuliers, tels que $F_1 \perp F_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, avec $\dim(F_1) = \dim(F) - 1$.

b) Supposons qu'il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g/_{F_1} = f/_{F_1}$. Notons $F'_1 = f(F_1)$. Montrer que $f(F_2) \subset F'^{\perp}_1$ et que $g(F_2) \subset F'^{\perp}_1$.

c) Montrer qu'il existe

$$h \in O(F'^{\perp}_1, q/_{F'^{\perp}_1}) \text{ telle que } h/_{g(F_2)} = (f \circ g^{-1})/_{g(F_2)}.$$

d) Montrer qu'il existe $k \in O(E, q)$ telle que $k/_F = f$.

IV.B.4) Démontrer le théorème de Witt.

••• FIN •••
