# Algèbre-Géométrie

## Enoncé 1

### Exercice 1

Soit $a$ un réel fixé. Étudier l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que les valeurs propres de la matrice

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & a-x \end{bmatrix}$$

soient 0 et $a$.

### Exercice 2

Soit $n$ un entier $\geq 2$. On note $O(n)$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre $n$. On définit l'application

$$\Phi : O(n) \to \mathbb{R},\, M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}.$$

1. Vérifier rapidement que la formule

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, et déterminer une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\Phi(M) = \langle M,U\rangle.$$

2. En déduire que

$$\Phi(M) \leq n^{3/2}.$$

Existe-t-il $M \in O(n)$ telle que $\phi(M) = n^{3/2}$?

3. Étudier les éléments propres de la matrice $U$.
4. Montrer l'existence de

$$\max\{\Phi(M),M \in O(n)\},$$

et calculer ce réel.

## Enoncé 2

### Exercice 1

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O,\vec{i},\vec{j})$, on considère, pour tout $z$ réel, l'ensemble $C_z = \{M(x,y) \,/\, f(x,y) = z\}$ où

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \frac{1+x+y}{1+x^2+y^2}.$$

1. Déterminer la nature géométrique de $C_z$. Représenter $C_0$, $C_1$ et $C_{-1}$.
2. Déterminer les extremums de la fonction $f$.

**Exercice 2**

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ sa base canonique.
On note Tr la trace et $\mathcal{C} = \{u \in L(E) \,/\, \forall A,B \in E \ u(AB) = u(BA)\}$.

1. Pour $i \neq j$, calculer $E_{ij}E_{jj} - E_{jj}E_{ij}$ et $E_{ij}E_{ji} - E_{ji}E_{ij}$.
   En déduire que $\mathrm{Ker(Tr)} = Vect\{AB-BA \,/\, A,B \in E\}$ et donner un supplémentaire de Ker(Tr) dans $E$.
2. Déterminer le noyau de tout élément $u \in \mathcal{C}$, $u \neq 0$.
   Décrire les éléments de $\mathcal{C}$ et donner la dimension de $\mathcal{C}$.
3. Existe-t-il $u \in \mathcal{C}$ tel que $\mathrm{Tr}(u(A)) = \mathrm{Tr}(A)$ pour tout $A \in E$?

# Enoncé 3

**Exercice 1**

Soit $E$ un espace vectoriel et $f,g \in L(E)$ tels que $f \circ g = id_E$.

1. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image.
2. A-t-on $g \circ f = \mathrm{id}_E$?

**Exercice 2**

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $A$ est définie positive ( valeurs propres strictement positives) si et seulement si $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2 \mapsto {}^tXAY$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ {}^tA_2 & A_3 \end{pmatrix}$ symétrique définie positive avec $A_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, $A_3 \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ et $1 \leq k < n$.
   Montrer que la matrice $A_1$ est définie positive.
   A l'aide d'un polynôme annulateur de $A_1$, montrer que la matrice $A^+ = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
3. Une application. Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques avec $A$ positive et $B$ définie positive.
   Montrer que $AB$ est semblable à $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C$ avec $C$ symétrique définie positive et $k = \mathrm{rg}(A)$ .
   En déduire que $AB$ est diagonalisable.

# Enoncé 4

**Exercice 1**

Calculer
$$\inf \left\{ \int_1^e (\ln t - a - bt)^2 dt \,, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Exercice 2**

On considère une application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les conditions suivantes :

$(i)$ $\Phi(I_n) = I_n$,
$(ii)$ $\Phi$ est linéaire,
$(iii)$ $\Phi(MN) = \Phi(M)\Phi(N)$ pour tout $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$,

(*iv*) $\Phi$ est bijective.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $M$ est inversible si et seulement si $\Phi(M)$ l'est, puis que $M$ et $\Phi(M)$ ont le même spectre.
2. Dans cette question, on note $D$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1,2\ldots,n$, et on suppose que $\Phi(D) = D$.
   (a) Pour $1 \leq i,j \leq n$, on note $E_{ij}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice $(i,j)$ qui vaut 1. Expliciter la matrice $DE_{ij}$, et en déduire que toutes les lignes, sauf la $i$-ème, de la matrice $\Phi(E_{ij})$ sont nulles. On montre de même que toutes les colonnes, sauf la $j$-ième, de la matrice $\Phi(E_{ij})$ sont nulles. Cela permet d'écrire
   $$\Phi(E_{ij}) = c_{ij}E_{ij},$$
   où $c_{ij}$ est un nombre complexe.

   (b) Montrer les égalités suivantes
   $$c_{ii} = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq n \quad \text{ et } \quad c_{ij} = c_{i1}c_{1j} \text{ pour } 1 \leq i,j \leq n.$$

   (c) En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
   $$\Phi(M) = \Delta^{-1}M\Delta \quad \text{pour tout} \quad M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$
3. On ne suppose plus que $\Phi(D) = D$. En utilisant la question 1., montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que
   $$\Phi(M) = P^{-1}MP \quad \text{pour tout} \quad M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

# Analyse

## Enoncé 1

### Exercice 1

On considère l'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt.$$

1. Justifier l'existence de $I$.
2. Exprimer $I$ sous la forme d'une somme de série convergente.

### Exercice 2

Soit $\alpha$ un réel irrationnel fixé. On note $R_\alpha$ le rayon de convergence de la série entière
$$\sum \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}.$$

1. Montrer que $R_\alpha \leq 1$.

2. On considère à présent la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$q_1 = 2 \text{ et } q_{n+1} = q_n^{q_n} \text{ pour } n \geq 1.$$

   (a) Montrer que
   $$\frac{q_n}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n} \text{ pour } n \geq 1.$$
   En déduire que la série $\sum \frac{1}{q_n}$ est convergente. Dans la suite, on pose
   $$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$$
   et on **admet** que $\alpha$ est irrationnel.

   (b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
   $$\pi q_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{q_k} \leq \frac{C}{q_n^{q_n - 1}} \text{ pour } n \geq 1.$$

   (c) Montrer enfin que $R_\alpha = 0$.

   (d) Question subsidiaire : montrer que $\alpha$ est effectivement irrationnel.

## Enoncé 2

### Exercice 1

Soient $(u_n)$ et $(a_n)$ deux suites de réels positifs tels que $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la suite $(u_n)$ converge (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

### Exercice 2

Soit $E_0 = \mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel complexe des applications continues et $2\pi$-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, et $E_1$ le sous-espace vectoriel des applications de $E_0$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. On considère aussi la norme sur $E_0$ définie par

$$\forall f \in E_0, \quad ||f||_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{|f(t)|^2}{2\pi}\, dt}.$$

À toute application $f$ de $E_1$ on associe $\tilde{f} = \Phi(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt.$$

1. Vérifier que $\Phi$ est une application linéaire de $E_1$ vers $E_0$.
2. Déterminer pour $f \in E_1$ et $n \in \mathbb{Z}$ les coefficients de Fourier $c_n(\tilde{f})$ en fonction de $c_n(f)$ et de $\alpha_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.
3. Déterminer une constante $C > 0$ telle que $||\Phi(f)||_2 \leq C||f||_2$ pour tout $f \in E_1$. Interprétation?
4. $\Phi$ est-elle injective? surjective?

## Enoncé 3

### Exercice 1

Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n^3}{n!}$$

est convergente, et calculer sa somme.

### Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$y'' + (\cos^2 t)y = 0. \qquad (E)$$

1. Justifier l'existence d'une solution $u$ de $(E)$ telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
2. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ vérifiant :

$$\alpha < 0 < \beta, \quad u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0.$$

3. En déduire que $u$ possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}_-^*$ et un zéro dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. Justifier l'existence des réels

$$\gamma = \max\{t \in \mathbb{R}_-^* / u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min\{t \in \mathbb{R}_+^* / u(t) = 0\}.$$

5. Soit $v$ une solution de $(E)$, linéairement indépendante de $u$. On pose $W = uv' - u'v$. En étudiant les variations de $W$, montrer que $v$ possède au moins un zéro dans $]\gamma,\delta[$.
6. Soit $w$ une solution non nulle de $(E)$. Montrer que $w$ admet une infinité de zéros. On pourra utiliser les fonctions

$$w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t + n\pi),$$

où $n$ décrit $\mathbb{N}$.

## Enoncé 4

### Exercice 1

Soit la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t + t^2 + \ldots + t^n}\, dt.$$

1. Montrer que la suite $I_n$ converge vers une limite $\ell$ que l'on précisera.
2. Etudier la nature de la série de terme général $I_n - \ell$. On pourra établir et utiliser l'inégalité

$$\forall t \in [0,1], \quad 1 + t + t^2 + \ldots + t^{2n} \geq nt^n.$$

### Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^k$ euclidien et $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ minorée sur $E$.

1. Pour $\epsilon > 0$, on définit la fonction $f_\epsilon$ sur $E$ par
$$\forall x \in E, \quad f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon\|x\|.$$
Déterminer $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f_\epsilon(x)$. En déduire qu'il existe $x_\epsilon \in E$ tel que
$$\forall x \in E, \quad f_\epsilon(x_\epsilon) \leq f_\epsilon(x).$$
2. En notant $x = x_\epsilon + ty$ où $y \in E$ et $t < 0$, établir que
$$\frac{f(x_\epsilon + ty) - f(x_\epsilon)}{t} \leq \epsilon\|y\| \quad \text{puis que} \quad \langle \operatorname{grad} f(x_\epsilon) | y \rangle \leq \epsilon\|y\|.$$
3. En déduire qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de $E$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{grad} f(x_n) = 0$.
Donner une interprétation géométrique dans les cas $n = 1$ et $n = 2$.
4. Est-il possible que la suite $(x_n)_n$ soit convergente dans $E$?

## Enoncé 5

### Exercice 1

La fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \int_0^x \sin(e^t)dt$$
a-t-elle une limite en $+\infty$?

### Exercice 2

Soit $a$ un entier pair $\geq 12$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \sin(a^k x).$$

1. Montrer que la fonction $W$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, l'inégalité
$$\left| \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} - \cos x \right| \leq \frac{h}{2}.$$
3. On fixe $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et on pose $h_n = \frac{2\pi}{a^n}$ et $h'_n = \frac{\pi}{a^n}$, ainsi que
$$\Delta_n = \frac{W(x+h_n) - W(x)}{h_n} \text{ et } \Delta'_n = \frac{W(x+h'_n) - W(x)}{h'_n}.$$
Montrer que
$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a^k x) + \varepsilon_n, \text{ avec } |\varepsilon_n| \leq \frac{\pi}{a-1},$$
et que
$$\Delta'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a^k x) - \frac{2\sin(a^n x)}{\pi} + \varepsilon'_n, \text{ avec } |\varepsilon'_n| \leq \frac{\pi}{2(a-1)}.$$

4. On suppose $W$ dérivable en $x$. Avec les notations de la question précédente, vérifier que

$$\cos(a^n x) = \Delta_{n+1} - \Delta_n + \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \text{ et } \sin(a^n x) = \frac{\pi}{2}(\Delta_n - \Delta'_n + \varepsilon'_n - \varepsilon_n),$$

et en déduire les deux inégalités

$$|\cos(a^n x)| \leq \frac{2\pi}{a-1} + \delta_n \text{ et } |\sin(a^n x)| \leq \frac{3\pi^2}{4(a-1)} + \delta'_n,$$

où $\delta_n$ et $\delta'_n$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.

5. En utilisant une célèbre formule de trigonométrie, montrer que la fonction $W$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

## Enoncé 6

### Exercice 1

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus $d$ muni de la norme $\| \|_\infty$ définie par

$$\forall P \in E, \quad \| P \|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

1. Rappeler la notion de polynôme d'interpolation de Lagrange.
2. On suppose que $(P_n)_n$ est une suite de $E$ convergeant simplement sur $[0,1]$ vers une fonction $f$. Montrer que $f \in E$ et que $(P_n)_n$ converge vers $f$ pour la norme $\| \|_\infty$.
3. Donner un exemple de suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ convergeant simplement sur $[0,1]$ vers une fonction $g$ n'appartenant pas à $\mathbb{R}[X]$.

### Exercice 2

Soit $f$ la fonction réelle $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1. Rappeler les propriétés du développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1 + x^p)^\alpha$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2. Montrer que $f$ admet un développement en série entiere $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq 1$ et que $(1 + x + x^2)f'^2(x) = (x + \frac{1}{2})^2$ pour tout $|x| < R$.
3. Montrer que la fonction complexe $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a même rayon de convergence $R$. En déduire, par le choix judicieux d'un complexe qu'il est impossible d'avoir $R > 1$.
4. Montrer que $f$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux. En déduire une méthode de calcul rapide des $a_n$.