Sujet 40

L'espace $E=\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. On considère la matrice
$$A=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}+\sqrt{2}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&1&1&-1\\1&-1&1&1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}+\sqrt{3}\begin{pmatrix}0&-1&0&-1\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\right)$$
et on note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à A.

   (a) Vérifier que A est une matrice orthogonale.

   (b) Calculer son polynôme caractéristique P et en donner une factorisation $P=Q\,R$ où Q et R sont des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ du second degré sans racines réelles.

   (c) Vérifier que $E=\ker(Q(f))\oplus\ker(R(f))$.

   (d) Donner la matrice de f dans une base orthonormale adaptée à la somme directe de la question précédente.

   En déduire une caractérisation géométrique des endomorphismes induits par f sur $\ker(Q(f))$ et $\ker(R(f))$.

2. On considère maintenant la matrice
$$B=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&0&-\frac{2\sqrt{2}}{5}&\frac{2\sqrt{2}}{5}\\0&\frac{3}{5}&-\frac{2\sqrt{2}}{5}&-\frac{2\sqrt{2}}{5}\\\frac{2\sqrt{2}}{5}&\frac{2\sqrt{2}}{5}&\frac{3}{5}&0\\-\frac{2\sqrt{2}}{5}&\frac{2\sqrt{2}}{5}&0&\frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que B est une matrice orthogonale.

   (b) Trouver un polynôme à coefficients réels du second degré annulateur de B.

   (c) Soit (X,Y) de E^2 tel que $Z=X+\mathrm{i}\,Y$ soit un vecteur propre pour l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à B.

   Montrer que $\mathrm{Vect}(X,Y)$ est stable par l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à B.

   (d) Déterminer une matrice réelle diagonale par blocs semblable à B.

   Donner une caractérisation géométrique de g.

Sujet 60

Dans ce qui suit D_1 et D_2 sont deux droites affines de l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, c'est-à-dire du produit scalaire qui rend sa base canonique orthonormée.

Cet espace est muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Dans cet espace p_1 est la projection orthogonale sur D_1 et p_2 la projection orthogonale sur D_2.

On définit alors une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- A_0 est un point quelconque de D_1 ;
- $B_n = p_2(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $A_{n+1} = p_1(B_n) = (p_1 \circ p_2)(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Programmer une fonction P qui prend en arguments un point A de E, un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ et un point M de E et retourne le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ contenant A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (les points et le vecteur sont identifiés à leurs coordonnées).

2. Dans cette question on étudie le cas où :

   D_1 passe par $(1, -5, 1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$;

   D_2 passe par $(1, 3, 1)$ et est dirigée par $2\,\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}$.

   (a) A l'aide de la fonction P exprimer les projetés $p_1(M)$ et $p_2(M)$ pour $M = (x, y, z)$.

   (b) Exprimer également dans ce cas particulier $p_1 \circ p_2(M)$ et résoudre l'équation
   $$p_1 \circ p_2(M) = M.$$

   (c) Pour un A_0 de votre choix calculer A_n pour $n \in [\![1, 10]\!]$.

   (d) Quelle conjecture peut-on émettre ?

3. On revient au cas général.

   (a) Montrer que si D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $(X, Y) \in D_1 \times D_1$,
   $$||p_1 \circ p_2(X) - p_1 \circ p_2(Y)|| \leqslant k||X - Y||.$$

   (b) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et un k de $[0, 1[$ tels que pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant k\ |x - y|$.

   Pour α de $\mathbb{R}$ on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   On pose $v_0 = u_0$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

   Montrer que la série de terme général v_n est convergente.

   Qu'en déduit-on pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   Montrer que f admet un et un seul point fixe.

   (c) Démontrer la conjecture émise.

Sujet 65

Soient a et b deux réels non simultanément nuls, et $\mathcal{C}$ l'arc (ou si l'on préfère la courbe) de $\mathbb{R}^3$ de paramétrage :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \frac{a+b\,t}{1+t^2} \\ y(t) = t\,x(t) \\ z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R} .$$

On note M_t le point $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Dans cette question, on suppose que $a = 4$ et $b = -2$.

   Donner une représentation à l'écran de la courbe $\mathcal{C}$ et conjecturer sa nature.

2. On revient au cas général.

   Déterminer par une équation un plan P contenant la courbe $\mathcal{C}$.

3. Soit $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (b, a, 0)$.

   (a) Donner le paramétrage de $\mathcal{C}$ dans un repère $(O, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ orthonormé adapté à P (on explicitera les vecteurs $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$).

   (b) On pose $u = 2\arctan(t)$.

   Donner un paramétrage de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ en fonction de u.

   (c) En déduire la nature de la courbe $\mathcal{C}$: on précisera le grand axe, le petit axe et l'excentricité de $\mathcal{C}$.

4. Déterminer par une équation cartésienne une quadrique S (non plane) telle que C soit incluse dans l'intersection de S avec P. Préciser cette quadrique.

   On pourra distinguer les deux cas :

   (a) $b = 0$;

   (b) $b \neq 0$ (indication : pour un point de la courbe $\mathcal{C}$, exprimer t en fonction de x et z).

Sujet 79

Pour t réel strictement positif et z complexe on note : $t^z = \exp[z \ln t]$.

Pour z de $\mathbb{C}$ on pose :

$$G(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt.$$

1. (a) Sur quel intervalle I de $\mathbb{R}$ la restriction de G à $\mathbb{R}$ est-elle définie ?
   (b) Donner une représentation à l'écran de G sur I.
   (c) Donner une valeur approchée décimale raisonnable pour son minimum.
   (d) Déterminer l'ensemble D des nombres complexes z pour lesquels l'intégrale définissant $G(z)$ est absolument convergente.

2. Pour (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathrm{i}\, y \in D$, on pose
$$H(x, y) = \left|G(x + \mathrm{i}\, y)\right|.$$
   Donner une représentation à l'écran de la surface S d'équation
$$S : \; z = H(x, y)$$
   sur un ensemble raisonnable.

   Que penser de l'équation $G(z) = 0$ pour $z \in D$?

3. On veut prouver le résultat précédent.

   (a) Montrer que pour tout z de D, on a
$$G(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{z-1} \, (1 - \frac{t}{n})^n \, dt \; .$$
   (b) En déduire que pour tout z de D, on a
$$G(z) = \lim_{n\to\infty} n^z \int_0^1 s^{z-1} \, (1 - s)^n \, ds.$$
   (c) En déduire que pour tout z de D, on a :
$$G(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z \, n!}{\prod_{k=0}^n (z + i)}.$$
   (d) On pose $u_n(z) = \dfrac{\prod_{k=0}^n (z + k)}{n^z \, n!}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et z de D.
   Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout y de $\mathbb{R}$, la suite $\left(\left|u_n\big(\alpha + \mathrm{i}\, y\big)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite non nulle et conclure.

Sujet 80

On considère l'équation différentielle

$$\mathcal{E}: \ (x^2+x)\,y'' - (x+3)\,y' - 3\,y = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe C^2 définie sur un intervalle I à valeurs réelles.

1. Résoudre $\mathcal{E}$ dans les cas suivants (*on précisera bien dans chacun des cas la structure de l'ensemble des solutions*) :
   (a) $I =]-\infty, -1[$;
   (b) $I =]-1, 0[$;
   (c) $I =]0, +\infty[$;
   (d) $I =]-\infty, 0[$;
   (e) $I =]-1, +\infty[$;
   (f) $I = \mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions de $\mathcal{E}$ développables en série entière au voisinage de 0 et préciser leur rayon de convergence.
3. Pour tout A de $\mathbb{R}$ déterminer la (ou les) solution(s) maximale(s) du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (x^2+x)\,y'' - (x+3)\,y' - 3\,y = 0 \\ y(1) = A \text{ et } y'(1) = 1 \end{cases}.$$