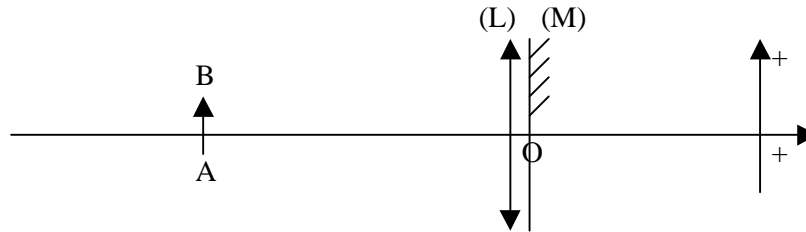


## Optique géométrique

1) Rappeler le principe de la mesure de la distance focale d'une lentille mince convergente par la méthode d'autocollimation. Vérifier une des propriétés de cette méthode à l'aide du logiciel Optigeo.

2) On accole une lentille mince (L) de centre optique O et de distance focale image  $f'$  à un miroir plan (M) perpendiculaire à l'axe optique de la lentille, si bien que (M) passe par O.



a) Déterminer la position et le grandissement de l'image d'un petit objet transverse  $\overrightarrow{AB}$  par ce système optique, c'est à dire après deux passages par (L) séparés par une réflexion sur (M).

b) Si le miroir n'est pas accolé à la lentille on constate que lorsqu'on déplace l'objet dans le logiciel il existe une position, différente du foyer objet de la lentille, pour laquelle on obtient également une image dans le même plan de front que l'objet lui-même. Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel et expliquer le simplement. Peut-on cependant confondre cette situation avec celle souhaitée ?

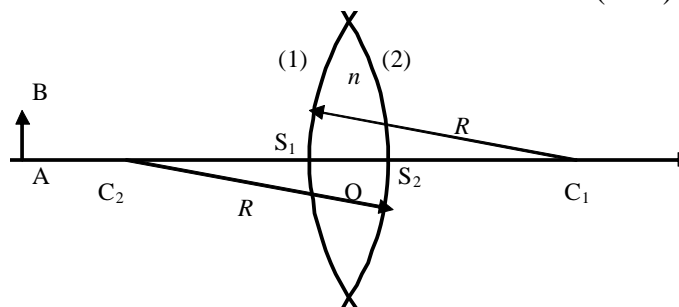
c) Montrer que le système complet est équivalent à un miroir sphérique dont on précisera les caractéristiques : positions du sommet et du centre. Vérifier votre résultat à l'aide du logiciel. Quel est cependant l'inconvénient d'un tel miroir sphérique simulé à peu de frais par rapport au véritable miroir sphérique équivalent ?

3) L'opérateur utilise par mégarde un miroir sphérique.

⊠ Peut-on obtenir la situation exacte souhaitée ?

⊠ Montrer qu'il est cependant possible d'obtenir des positions relatives de l'objet  $\overrightarrow{AB}$  et de son image (après deux traversées de la lentille et une réflexion par le miroir) et le grandissement attendus par la méthode d'autocollimation, mais donnant un résultat inexact pour la focale de la lentille. Comment éviter cette erreur ?

4) On suppose que l'on utilise une lentille biconvexe faite d'un verre d'indice  $n$ , dont les deux faces (1) et (2) ont le même rayon de courbure  $R$  : la distance focale image de la lentille est alors  $f' = \frac{R}{2(n-1)}$ .



On suppose également que la face (2) de la lentille a été métallisée de sorte que la réflexion s'effectue sur cette face (2) qui agit comme un miroir sphérique de centre  $C_2$  et de sommet  $S_2$  qu'on confondra avec O car il s'agit d'une lentille mince (les proportions ne sont pas respectées sur le schéma).

a) Justifier qu'on peut supposer que ce miroir sphérique se trouve à l'extérieur de la lentille, juste après elle.

b) Montrer qu'il est possible d'obtenir des positions relatives de l'objet  $\overrightarrow{AB}$  et de son image (après deux traversées de la lentille et une réflexion par la face (2) de la lentille) et le grandissement attendus par la méthode d'autocollimation. Mais que vaut alors la distance  $\overrightarrow{AO}$  ? Comparer avec ce que l'on aurait obtenu avec la même lentille non métallisée et un miroir plan. Application numérique : on prendra  $n = 1,5$  comme indice de la lentille.

## Solution

Cet exercice peut se faire sans aide informatique, toutefois le logiciel Optigeo (<http://www.lgep.supelec.fr/index.php?page=scm-logiciels>) constitue une excellente illustration pour certaines questions.

1) Cette question n'est qu'un rappel de cours qui sert de préambule à la suite de l'exercice.

La mesure par autocollimation consiste à placer sur le même axe optique un objet, la lentille (L) dont on veut mesurer la focale et un miroir plan (M). Lorsqu'on place l'objet au foyer objet de la lentille son image se forme au même point avec un grandissement transversal  $\gamma = -1$ .

A l'ouverture du logiciel s'affichent un objet, une lentille convergente à l'origine, l'image de l'objet et un écran. On ajoute un miroir plan en cliquant sur Système/miroir/miroir plan. On peut déplacer l'objet en cliquant dessus avec le bouton gauche de la souris puis en la déplaçant. Lorsque l'objet se trouve au foyer objet de la lentille son image se forme en dessous ( $\gamma = -1$ ). La position de l'objet (-0.5) donne la focale  $f=0.5$  de la lentille.

Une des propriétés de cette méthode est que la position du miroir n'a aucune influence sur le résultat final, ce qui se vérifie en déplaçant le miroir (un click avec le bouton gauche de la souris que l'on déplace ensuite en maintenant le bouton) une fois que l'objet se trouve au foyer de la lentille.

2)

a) On peut suivre le schéma suivant :

AB  $\xrightarrow{(L)}$  A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>  $\xrightarrow{(M)}$  A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>  $\xrightarrow{(L)}$  retour A'B' ,

Nous encourageons vivement les élèves à établir systématiquement un tel schéma pour toute question du même type en optique géométrique car il permet de 'suivre' le trajet d'un rayon et de fixer ainsi le nombre d'équations nécessaires à la résolution et les signes à adopter lors de leur écriture.

On a donc successivement différentes relations de conjugaison et expressions du grandissement :

$$\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \quad (1) \quad \gamma_1 = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}}$$

$$\frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_1} = 0 \quad (2) \quad \gamma_2 = -\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} = +1$$

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_2} = -\frac{1}{f'} \quad (3) \quad \gamma_3 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}} ,$$

le signe - devant  $1/f'$  dans la dernière relation prenant en compte le retour inverse de la lumière.

En calculant (3)+(2)-(1) et en écrivant  $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$  il vient finalement :

$$\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA} = -\frac{2}{f'} = \frac{2}{OF} \quad \gamma = -\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (4)$$

b) Cette question se résout sans calcul par un simple raisonnement qualitatif et par observation du phénomène à l'aide du logiciel. Il d'ailleurs toujours souhaitable de raisonner de façon qualitative avant d'aborder tout calcul et cette démarche est très appréciée des examinateurs.

Lorsque le miroir n'est pas accolé à la lentille et qu'on déplace l'objet dans le logiciel on constate qu'il existe deux positions pour lesquelles l'image finale se forme à la même position que l'objet : une pour laquelle l'image est située en dessous de l'objet (l'autocollimation) et une pour laquelle l'image se forme sur l'objet. Dans les deux cas il faut que  $A_2=A_1$ . Dans le cas de l'autocollimation  $A_2=A_1=\infty$ . Dans l'autre cas l'objet, la lentille et le miroir sont dans une configuration telle que l'image de l'objet se forme sur le miroir, l'image de l'image par le miroir est donc également sur le miroir et, par retour inverse à travers la lentille, l'image finale se trouve superposée avec l'objet.

Il n'est toutefois pas possible de confondre cette situation avec l'autocollimation puisque le grandissement est égale à +1. En outre, un léger déplacement du miroir fait disparaître cette superposition.

c) Les relations (4) correspondent aux relations obtenues pour un miroir sphérique de sommet S=O et de centre C=F et donc de rayon  $R = -f'$ .

Dans le logiciel on supprime la lentille (double click) et on place un miroir sphérique à l'origine avec un rayon  $R = -0.5$  et, en plaçant l'objet à  $-0,5$  du miroir, on retrouve l'image de l'objet en dessous de celui-ci comme dans le cas de l'association de la lentille et du miroir plan.

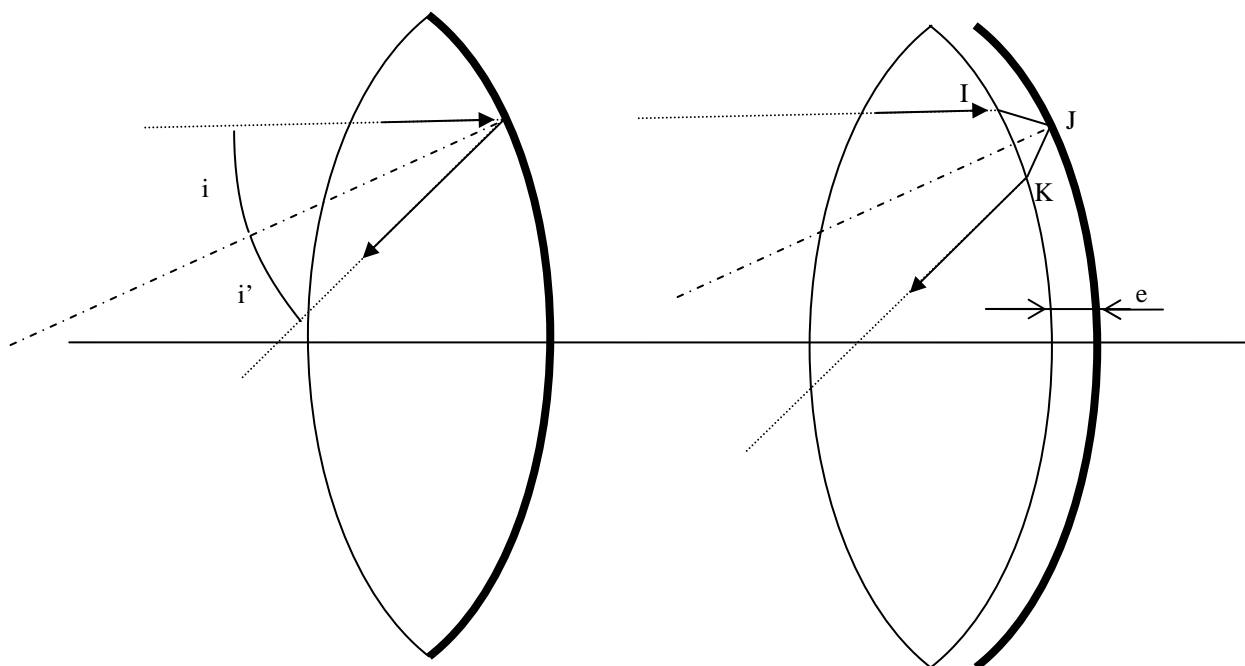
L'inconvénient du système (lentille+miroir) utilisé en tant que miroir sphérique est qu'il n'est pas achromatique puisqu'il y a une lentille dont la focale dépend de la longueur d'onde.

3) Comme dans le cas de la question 2.b cette question peut se résoudre sans calcul par un raisonnement qualitatif.

On veut A et A' dans le même plan de front avec un grandissement  $-1$ . Cela implique que  $A_1=A_2$ . Dans le cas d'un miroir plan cela implique que  $A_1$  et  $A_2$  se trouvent à l'infini. Toutefois, l'image d'un objet à l'infini à travers un miroir sphérique ne se trouve pas à l'infini. Il est donc évident que l'autocollimation ne peut pas être réalisée avec un miroir sphérique. On peut néanmoins obtenir  $A_1=A_2$  si l'image de A se forme au centre C du miroir sphérique. Le système se présente alors comme si l'autocollimation était réalisée mais il suffit de déplacer le miroir pour constater qu'il n'en est rien.

Ceci se vérifie très bien à l'aide du logiciel (Pas demandé dans la question mais le logiciel étant à disposition l'examineur peut demander à l'étudiant de l'utiliser lors de sa présentation). On place un objet en  $-1$ , une lentille en 0 (pour ajouter une lentille cliquer sur les lentilles) et le miroir sphérique ( $R= -0,5$ ) de la question précédente en  $+1,5$ . L'image finale se forme en dessous de l'objet avec un grandissement  $-1$ . Si on déplace le miroir l'autocollimation apparente disparaît.

4) a) On peut tracer les deux schémas suivants :



Réflexion sur la face arrière métallisée

Réflexion sur un miroir sphérique décalé de  $e$

Les rayons tracés sont ceux arrivant sur la face arrière de la lentille

Si on rapproche le miroir sphérique de la face arrière de la lentille la distance  $e$  entre le miroir et la face arrière de la lentille tend vers 0 et les points I, J et K deviennent confondus. Ainsi on peut négliger la réfraction à la sortie de la lentille. Localement on peut supposer la surface du miroir plane et prendre  $i=i'$ . Finalement, on peut donc supposer que le miroir sphérique se trouve à l'extérieur de la lentille juste après elle.

b) En utilisant les mêmes notations qu'au 2.a il vient le schéma suivant :

AB  $(L)$   $A_1B_1$   $(M)$  arrière  $A_2B_2$   $(L)$  retour  $A'B'$  ,

qui conduit aux relations :

$$\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} = \frac{2(n-1)}{R} \quad (5) \quad \gamma_1 = \frac{\overline{OA_1}}{OA}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} + \frac{1}{\overline{OA_1}} = -\frac{2}{R} \quad (6) \quad \gamma_2 = -\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{f'} = -\frac{2(n-1)}{R} \quad (7) \quad \gamma_3 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}}$$

En effectuant (7)+(6)-(5) et en écrivant  $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ , il vient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = -\frac{2(2n+1)}{R} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

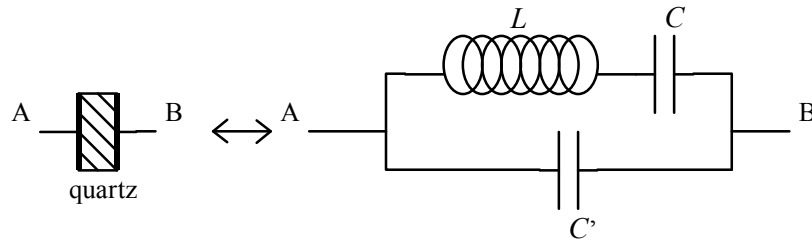
Si  $\overline{OA'} = \overline{OA}$  on trouve  $\overline{AO} = \frac{R}{2n+1}$ .

Si on avait utilisé la même lentille non métallisée et un miroir plan on aurait trouvé  $\overline{AO} = \frac{R}{2n-1}$ .

En prenant  $n = 1,5$  et en utilisant la lentille métallisée on trouve donc une ' focale ' moitié de la focale réelle.

Ce résultat se vérifie très bien avec le logiciel : si on accole le miroir à la lentille on obtient un grandissement de -1 pour un objet situé à  $-f/2$  (-0.25) de la lentille.

1) Du point de vue électrocinétique, un cristal de quartz placé entre deux électrodes métalliques est équivalent au dipôle suivant:

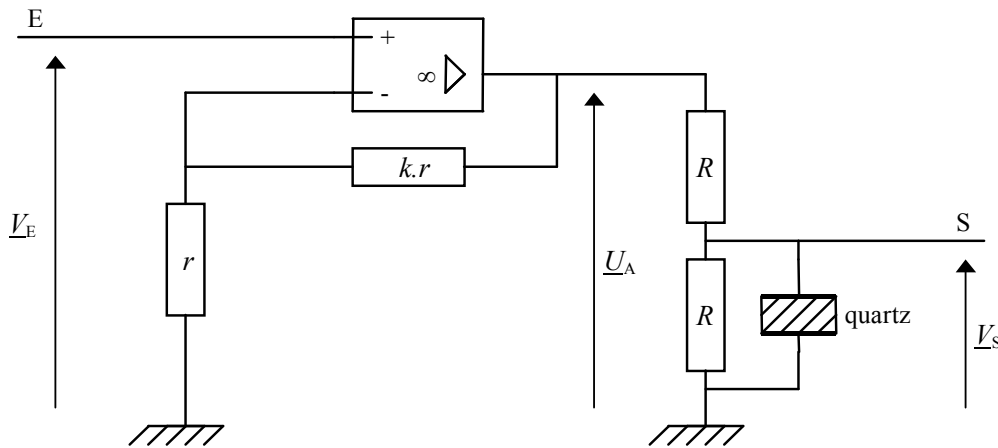


Calculer l'admittance complexe  $\underline{Y}(j\omega)$  ou l'impédance complexe  $\underline{Z}(j\omega)$  de ce dipôle ( $j^2 = -1$ ). Montrer qu'il existe deux pulsations particulières, notées  $\omega_S$  et  $\omega_P$  ( $\omega_S < \omega_P$ ) qui respectivement rend infinie et annule l'une et l'autre de ces grandeurs.

C'est une propriété du matériau quartz que  $C' = 50C$  ; calculer le rapport  $\omega_P / \omega_S$

Donner rapidement l'allure du module de  $\underline{Y}$  ou  $\underline{Z}$ .

2) On considère maintenant le montage suivant, autour d'un amplificateur opérationnel supposé idéal et en fonctionnement linéaire, où  $k$  est un réel positif.



a) Exprimer la fonction de transfert en tension (en sortie ouverte)  $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$  en fonction de  $k$ ,  $R$  et  $\underline{Z}(j\omega)$  ou  $\underline{Y}(j\omega)$  du quartz, puis donner son expression complète.

b) Etude informatique [Logiciel Anharm]. Le fichier i33005.FCT permet de tracer le diagramme de Bode de ce filtre, et d'étudier sa réponse à une tension sinusoïdale, en créneaux, etc (Menu Oscilloscope), ainsi que la décomposition en série de Fourier des tensions d'entrée et de sortie (Menu Fourier).

Dans le fichier on a pris  $k = 1$  ;  $R = 250 \Omega$  ;  $C = 1 \mu F$  ;  $L = 10 \text{ mH}$ .

Interpréter le diagramme de Bode en gain. Tracer la réponse à une tension d'entrée rectangulaire symétrique de fréquence  $f_1 = \omega_P/2\pi$  ;  $f_2 = \omega_P/6\pi$  et  $f_3 = \omega_P/10\pi$  et interpréter les réponses obtenues.

c) On ôte la source délivrant la tension sinusoïdale  $V_E(t)$ , et on relie par un fil le point E et le point S. Justifier qu'alors pour une certaine valeur de  $k$ , un régime d'auto-oscillations sinusoïdales peut exister (et il existe de fait obligatoirement) dans ce montage, à une pulsation fixée  $\Omega_0$  qu'on reliera à  $\omega_S$  ou  $\omega_P$ .

Quelle est l'amplitude prévisible de  $V_S(t)$  ?

De fait, la tension de sortie  $U_A(t)$  de l'amplificateur opérationnel peut ne pas être tout à fait sinusoïdale (pourquoi?), mais  $V_S(t)$  est une très belle sinusoïde. Interpréter.

## Solution

Le logiciel est disponible sur le site : <http://www.lgep.supelec.fr/index.php?page=scm-logiciels>

1) Un calcul simple donne :

$$\underline{Y}(j\omega) = j\omega \frac{C + C' + LC C' (j\omega)^2}{1 + LC(j\omega)^2} \quad \text{et évidemment} \quad \underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Y}(j\omega)}$$

La pulsation  $\omega_s$  qui rend infini  $\underline{Y}(j\omega)$  [ $\equiv \underline{Z}(j\omega) = 0$ ] est :  $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ,

et celle qui annule  $\underline{Y}(j\omega)$  [ $\equiv \underline{Z}(j\omega) = \infty$ ] est :  $\omega_p = \sqrt{\frac{C + C'}{LC C'}}$  .

Avec  $C' = 50C$  le rapport  $\omega_p / \omega_s \approx 1.01$ , les deux pulsations sont donc très proches. L'allure du module de  $\underline{Y}(j\omega)$  est donnée sur la figure 1.

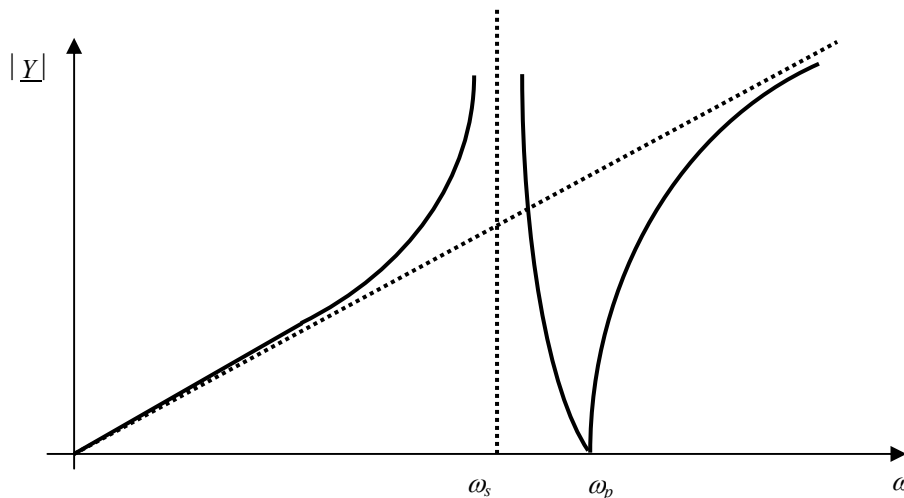


Figure 1.

Bien que seule l'allure soit demandée, l'étudiant peut préciser la pente de l'asymptote quand  $\omega$  tend vers l'infini c'est-à-dire  $|\underline{Y}(j\omega)| \rightarrow \omega C'$ .

L'allure de  $|\underline{Z}(j\omega)|$  se déduit assez facilement du tracé de la figure 1.

2)

a) Les conditions de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel font que  $V_+ = V_-$ . On peut trouver deux relations simples entre  $U_A$  et la tension d'entrée  $V_E$  et la tension de sortie  $V_S$ . Si on se place en régime sinusoïdal il vient :

$$\underline{U}_A = (1+k)\underline{V}_E$$

$$\underline{V}_S = \underline{U}_A \frac{\underline{Z}}{R + 2\underline{Z}} = \underline{U}_A \frac{1}{R\underline{Y} + 2}$$

Ce qui donne : 
$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = (k+1) \frac{\underline{Z}}{R + 2\underline{Z}} ,$$

et une expression finale de  $\underline{H}$  :

$$\underline{H} = (k+1) \frac{1 + LC(j\omega)^2}{2 + j\omega R(C+C') + 2LC(j\omega)^2 + RLCC'(j\omega)^3}$$

L'expression de  $\underline{H}$  est assez complexe mais relativement facile à obtenir si l'étudiant suit l'énoncé. De plus, il n'est pas nécessaire de faire intervenir le théorème de Millman pour trouver les relations entre  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{E}$  et  $\underline{S}$ , car il ne s'agit que de simples diviseurs de tension. L'utilisation de relations simples conduit plus rapidement au résultat en minimisant les erreurs de calculs.

b) Dans cette question on cherche à mettre en évidence l'aptitude de l'étudiant à utiliser ses connaissances et les résultats précédents afin de donner une explication cohérente aux phénomènes observés.

Le diagramme de bode en gain est présenté sur la figure 1 pour des fréquences comprises entre 10 et  $10^4$  Hz. L'allure générale est celle d'un filtre passe bas d'ordre 1, la pente de l'asymptote aux hautes fréquences étant égale à -20 dB/décade. Il existe toutefois un 'accident' aux alentours de 1600 Hz. Cet 'accident' est dû aux deux cas particuliers où  $\omega = \omega_s$  et  $\omega = \omega_p$ . En effet, pour  $\omega = \omega_s$   $\underline{H} = 0$  tandis que pour  $\omega = \omega_p$   $\underline{H} = (k+1)/2$ , ce qui donne  $\underline{H} = 1$  pour  $k = 1$ . Les deux pulsations étant proches l'une de l'autre, l'"accident" semble isolé alors qu'il est en fait constitué de deux phénomènes : le gain tend d'abord vers  $G_{dB} = -\infty$  pour  $\omega = \omega_s$  puis vers  $G_{dB} = 0$  pour  $\omega = \omega_p$ .

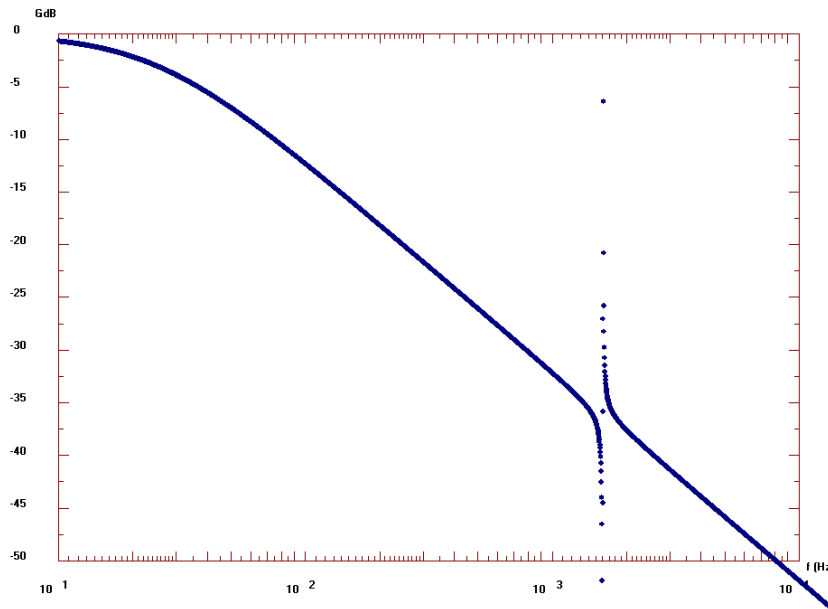


Figure 1

Lorsqu'on trace les réponses à  $f_1 = \omega_p/2\pi$  ( $\approx 1607,38$  Hz);  $f_2 = \omega_p/6\pi$  ( $\approx 535,79$  Hz) et  $f_3 = \omega_p/10\pi$  ( $\approx 321,47$  Hz), on obtient les résultats présentés sur les figures 2 à 4.

La figure 2, obtenue pour  $f = f_1$ , montre que la tension de sortie est une tension alternative, *ressemblant à une sinusoïde*, de même fréquence que la tension d'entrée et de valeur crête  $V_{Sc} \approx 1.27 \times V_{E_{max}}$ .

Nous aimerions insister ici sur le '*ressemblant à une sinusoïde*'. Les étudiants ont trop souvent tendance à avancer des conclusions sans justification précise. Par exemple, une double intégration d'un signal rectangulaire donne une tension de sortie formée de branches de paraboles dont la forme est très proche d'une sinusoïde. Seul un spectre de Fourier permet de conclure définitivement quant à la nature, sinusoïdale ou non, de la tension de sortie.

La figure 3, obtenue pour  $f = f_2$ , montre que la tension de sortie est une tension alternative comportant plusieurs composantes. On observe une composante à la fréquence  $f_2$  à laquelle se superpose une composante à la fréquence  $3 \times f_2$ .

La figure 5, obtenue pour  $f = f_3$ , montre que la tension de sortie est une tension alternative comportant plusieurs composantes. On observe une composante à la fréquence  $f_3$  à laquelle se superpose une composante à la fréquence  $5 \times f_3$ .

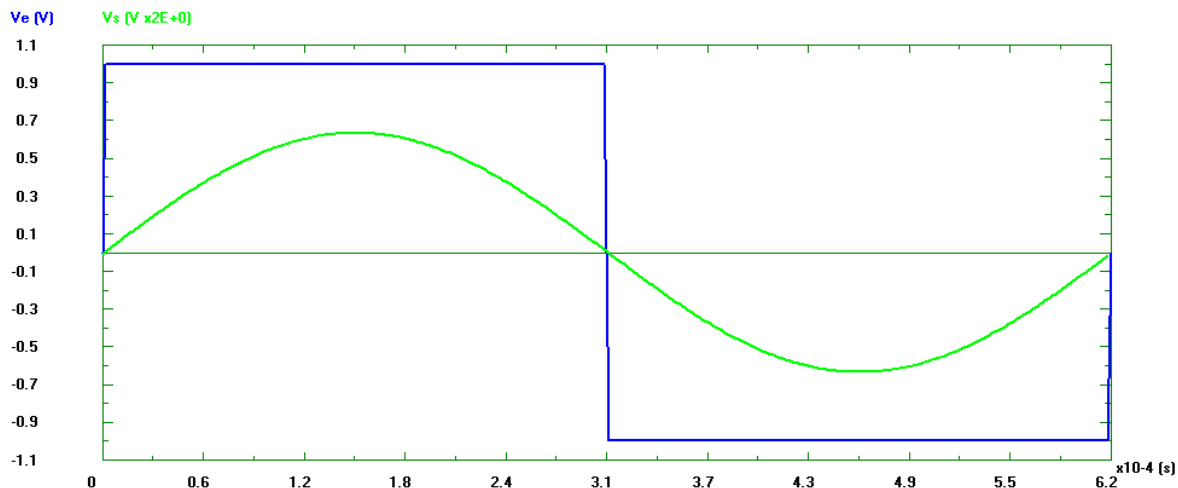


Figure 2

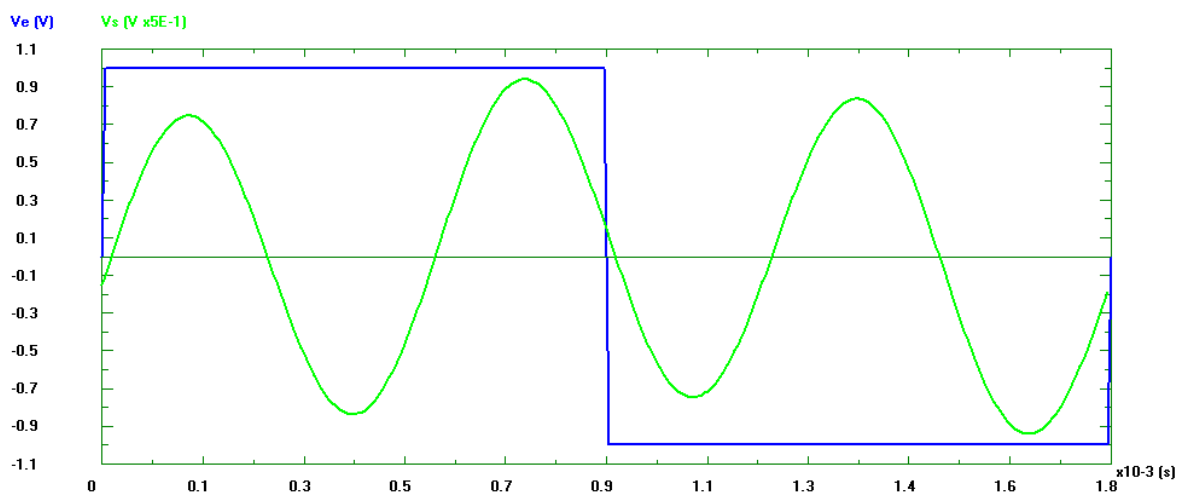


Figure 3

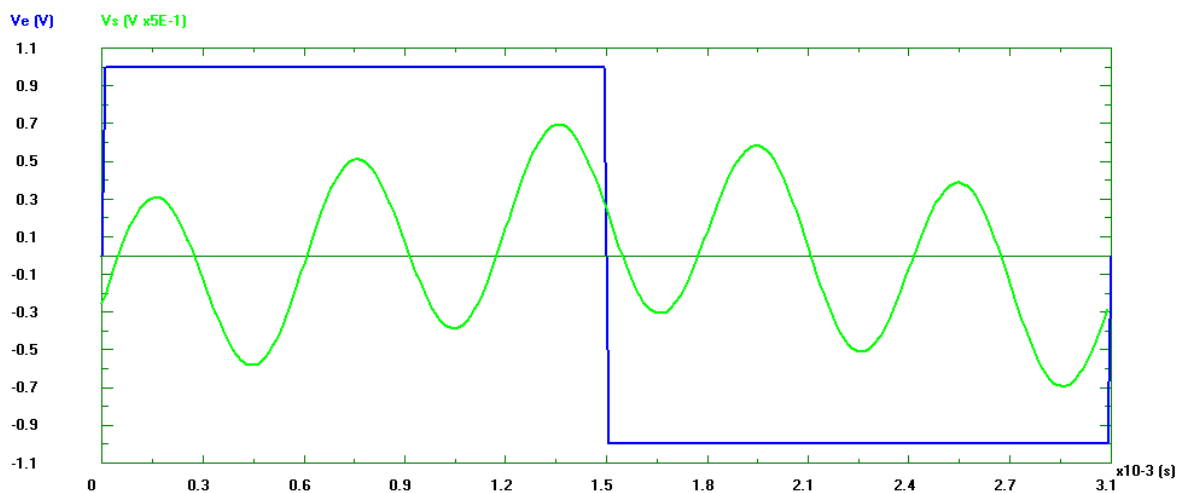


Figure 4

L'énoncé ne demande pas de faire une étude des spectres de Fourier de chacune des réponses mais mentionne que cela est possible. C'est à l'étudiant de prendre l'initiative d'utiliser cette fonction du logiciel pour interpréter les différentes réponses obtenues. Cette attitude sera très appréciée par les examinateurs.

Les spectres de Fourier des réponses présentées sur les figures 2 à 4 sont présentés sur les figures 5 à 7 respectivement.



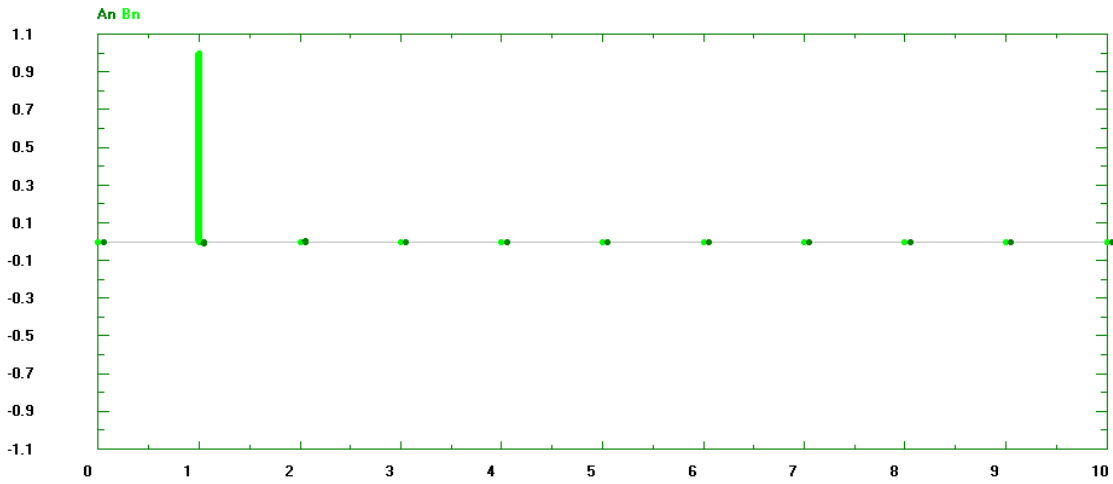


Figure 5

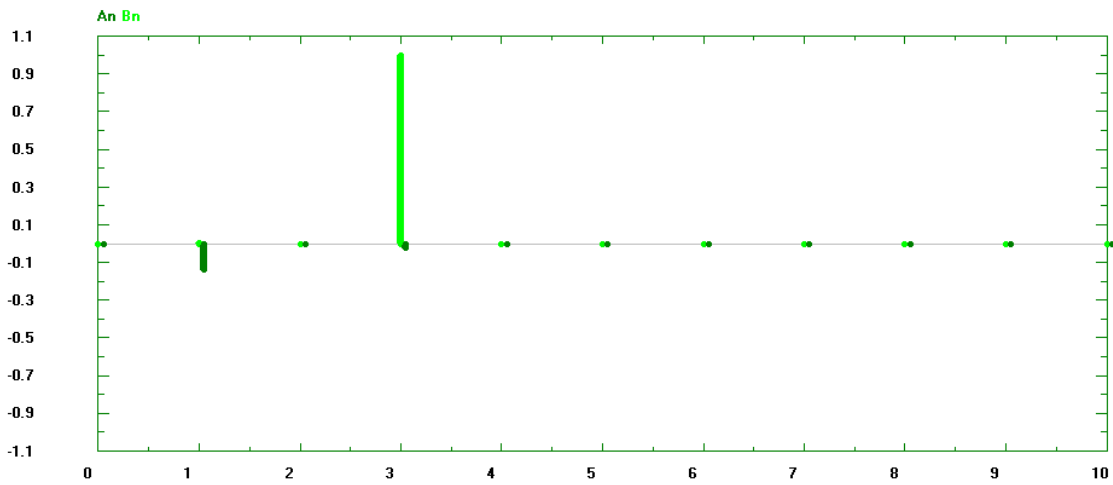


Figure 6

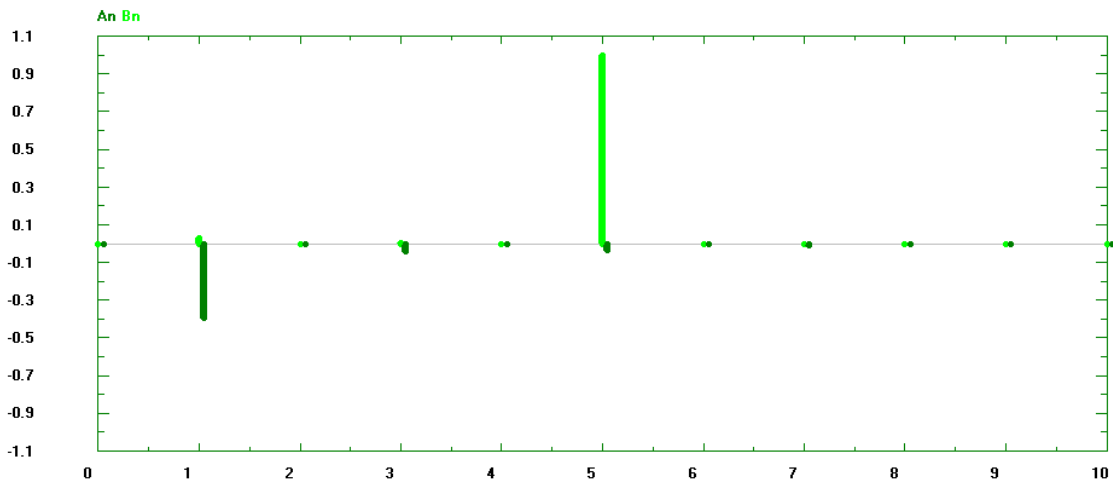


Figure 7

La figure 5 montre que le seul terme dominant du spectre de Fourier est celui correspondant à l'harmonique 1 (fondamental). La réponse obtenue est donc bien une sinusoïde de même fréquence que le signal d'entrée.

La figure 6 montre que les termes dominants de la décomposition sont ceux correspondant au fondamental et à l'harmonique 3.

Enfin, la figure 7 montre que les termes dominants de la décomposition sont ceux correspondant au fondamental et à l'harmonique 5 avec une très légère contribution de l'harmonique 3.

L'interprétation finale est donc la suivante. En l'absence de l''accident' la réponse pour chaque fréquence étudiée devrait être une intégration avec atténuation du signal rectangulaire d'entrée car, dans ce cas, le système n'est qu'un simple filtre passe bas d'ordre 1 et les fréquences utilisées se situent toutes dans la 'pente' du diagramme de Bode en gain au delà de la fréquence de coupure du filtre. La réponse devrait donc être un signal triangulaire atténué de même fréquence que la tension d'entrée.

Toutefois, le signal d'entrée peut aussi être décomposé en série de Fourier.

Dans le cas où  $f = f_1$  la fréquence du fondamental se situe exactement à la fréquence où  $\underline{H} = 1$ . Le fondamental n'est donc pas atténué. En revanche, les fréquences des harmoniques supérieures se situent à des positions où elles sont fortement atténuées ( $G_{dB} < -40$  dB). Il ne subsiste donc que le fondamental de la tension d'entrée dans le signal de sortie. Rappelons que la valeur crête  $V_c$  du fondamental d'un signal rectangulaire de valeur maximum  $V_{max}$  est  $V_c = 1.27 \times V_{max}$  ce que donne le logiciel.

Dans le cas où  $f = f_2 = f_1 / 3$  toutes les harmoniques du signal d'entrée sont atténuées sauf la troisième. Le signal de sortie est donc constitué de la somme des intégrales de toutes les harmoniques du signal d'entrée à l'exception de la troisième, ce qui donne la contribution à la fréquence  $f_2$ , et de la troisième harmonique du signal d'entrée qui donne la contribution à une fréquence triple du signal d'entrée.

Dans le cas où  $f = f_3 = f_1 / 5$  toutes les harmoniques du signal d'entrée sont atténuées sauf la cinquième, et le raisonnement précédent pour  $f = f_2$  s'applique à nouveau.

Nota : alors que la précision à deux décimales est parfois illusoire il se trouve qu'ici elle est essentielle compte tenu de la finesse du pic situé à  $\omega_p/2\pi$  (C'est même l'intérêt principal du quartz !). Il n'y a pas de question concernant cette précision dans l'énoncé mais lors de l'oral celle-ci peut être posée par l'examineur. On pourra par exemple essayer de retracer les mêmes figures (2 à 7) avec 1607,35 Hz, 535,75 Hz et 321,5 Hz et constater que les résultats sont légèrement différents.

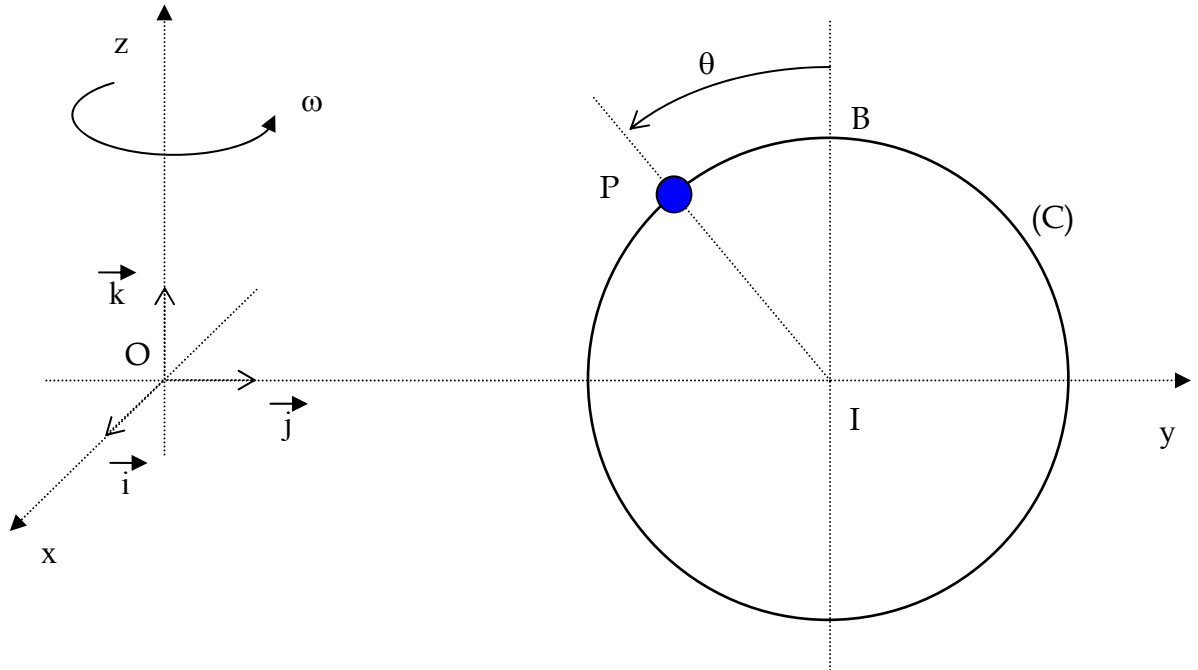
c) Si on relie l'entrée et la sortie on a nécessairement  $\underline{H} = 1$  et donc on doit prendre  $k = 1$ . Compte tenu de ce qui a été vu dans les questions précédentes la seule fréquence à laquelle le système est susceptible d'osciller se situe à la fréquence  $f_1$ , une des fréquences caractéristiques du quartz pour laquelle  $\underline{H} = 1$  correspondant à  $\omega = \omega_p$ . Dans ce cas les amplitudes du signal d'entrée et de sortie doivent évidemment être identiques.

Il se peut que la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel  $U_A(t)$  ne soit pas sinusoïdale, par exemple dans le cas où l'amplificateur opérationnel sature. Toutefois, il est clair que la finesse du filtre constitué par le quartz élimine toutes les harmoniques sauf le fondamental. Ainsi la tension de sortie est quasi parfaitement sinusoïdale compte tenu de ce qui a été vu à la question précédente.

## Mécanique

[i41032.eqd]

On considère un point matériel P de masse  $M$  mobile sans frottement sur une circonférence (C) de rayon  $R$  centrée au point I de l'axe Oy à une distance  $d$  de O ( $d > R$ ). La liaison entre P et (C) est bilatérale, c'est à dire que l'on peut considérer que P est une perle enfilée sur (C). Le référentiel Oxyz est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz à la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  où  $\omega$  est une constante positive. La position de P sur (C) est repérée par l'angle  $\theta = (\vec{k}, \vec{IP})$ . A  $t=0$ , P est au point B sans vitesse initiale.



1) A partir de la relation fondamentale de la dynamique, établir en fonction de l'accélération de la pesanteur  $g$ ,  $R$ ,  $d$  et  $\omega$  une relation liant l'accélération angulaire de P  $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2$  et  $\theta$ .

2) a) Par intégration de l'équation précédente, établir une relation liant  $\dot{\theta}^2$ , où  $\dot{\theta}$  est la vitesse angulaire du point P  $\{\dot{\theta} = d\theta/dt\}$  et  $\theta$  pour les conditions initiales données.

b) Montrer que le théorème de l'énergie cinétique permet de retrouver la relation précédente.

3) On se place dans le cas où  $d/R=2$ . Etablir une relation de la forme  $F(\theta)\dot{\theta}^2 + G(\theta)=E_0$  où  $E_0$  est une constante. Expliciter  $F(\theta)$ ,  $G(\theta)$  et  $E_0$ . A l'aide du logiciel qui vous est fourni [Equadif, fichier i42032.eqd], dans lequel  $\omega$  est notée  $W$ , tracer  $G(\theta)-E_0$  et trouver les positions d'équilibre et discuter de leur stabilité [ $\theta$  est noté  $x$ ]. Observer comment évolue les positions d'équilibre quand  $\omega$  varie : expliquer.

On a fixé  $R=1$  m et  $g=10$   $\text{ms}^{-2}$ .

4) Exprimer en fonction de  $M$ ,  $R$ ,  $\omega$ ,  $\theta$  et ses dérivées par rapport au temps, les composantes de la réaction du cercle (C) sur le point P.

## Solution

Le logiciel est disponible sur le site :

<http://www.lgep.supelec.fr/index.php?page=scm-logiciels>

1) Le schéma proposée dans l'énoncée est évidemment incomplet et l'examineur attend de l'étudiant qu'il fasse un bilan complet des forces agissant sur P et représente au moins les principales sur le schéma.

Les forces agissant sur P sont :

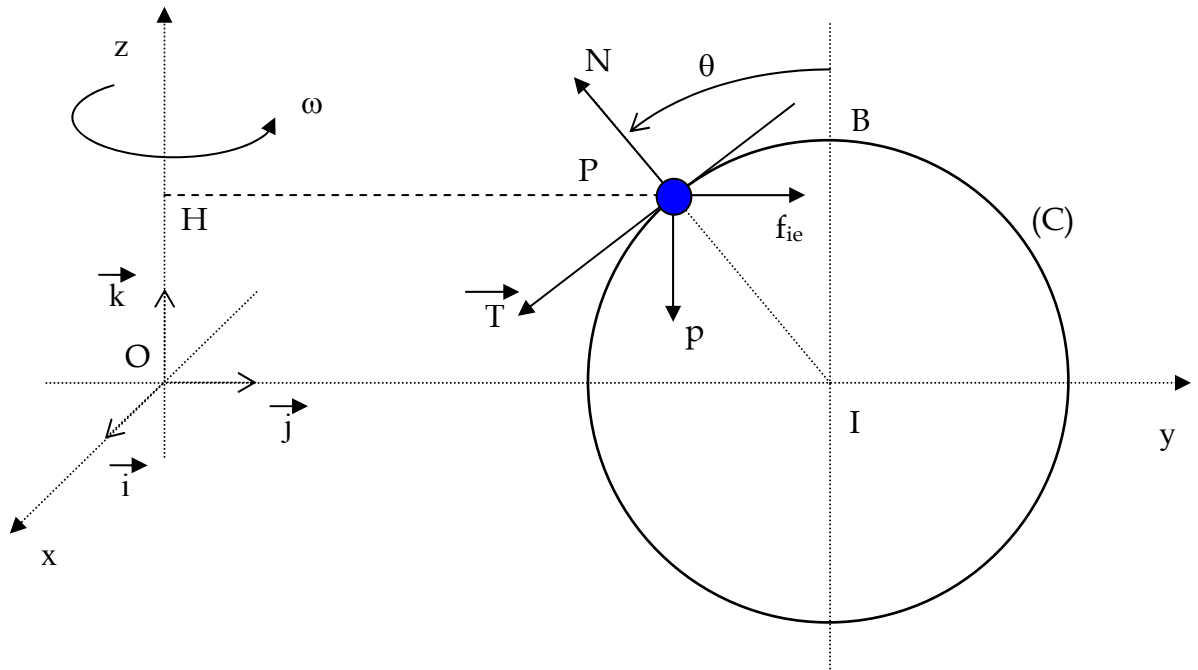
Son poids  $\vec{p} = M \vec{g}$  orienté selon  $-\vec{k}$

La force d'inertie d'entrainement  $\vec{f}_{ie} = M\omega^2 \overrightarrow{HP}$  où H est le projeté orthogonal de P sur Oz

La force de Coriolis  $\vec{f}_{ic} = -2M\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$

La réaction du cercle  $\vec{N}$  normale à la circonférence puisqu'il n'y a pas de frottement.

Ce qui donne le schéma ci-dessous dans lequel la force de Coriolis est perpendiculaire au plan de la figure :



L'étudiant peut faire remarquer que la réaction peut être normale à la circonférence sans pour autant être dans le plan de la figure compte tenu de l'orientation de la force de Coriolis.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$M \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} = M \vec{g} + M\omega^2 \vec{HP} - 2M\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} + \vec{N}$$

La réaction normale  $\vec{N}$  étant inconnue, on projette les forces sur la tangente à la circonférence orientée dans le sens des  $\theta$  croissants, soit :

$$M \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} \cdot \vec{T} = M \vec{g} \cdot \vec{T} + M\omega^2 \vec{HP} \cdot \vec{T}$$

Le vecteur  $\vec{OP}$  s'écrit :

$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} 0 \\ d - R \sin(\theta) \\ R \cos(\theta) \end{bmatrix} ,$$

ce qui donne après calcul :

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin(\theta) - \omega^2 \left( \frac{d}{R} - \sin(\theta) \right) \cos(\theta) \quad (1).$$

2) a) On multiplie les deux membres de l'équation (1) par  $2\dot{\theta}$  et on intègre, ce qui donne :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos(\theta)) - 2\omega^2 \frac{d}{R} \sin(\theta) - \omega^2 \frac{\cos(2\theta)}{2} + cte$$

La constante se détermine par les conditions initiales : à  $t=0$ ,  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta}=0$ . Ce qui amène finalement à :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos(\theta)) - 2\omega^2 \frac{d}{R} \sin(\theta) + \omega^2 \sin^2(\theta) \quad (2)$$

b) L'étudiant peut proposer deux solutions : une solution très générale et une solution propre à l'exercice. Il est évident que la solution générale sera très appréciée des examinateurs car elle montre un bonne maîtrise de la physique.

La solution générale consiste à écrire la relation fondamentale de la dynamique sous la forme :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}_{appliquées} , \quad (3)$$

où  $\vec{V}$  est la vitesse du point P. Si on multiplie scalairement par  $\vec{V}$  les deux membres de l'équation (3) il vient :

$$M\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{V} \vec{F}_{\text{appliquées}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dE_c}{dt} = \sum \text{Puissances},$$

qui, après intégration, conduit à :  $E_c + E_p = cte.$

On doit donc retrouver la relation (2) par application du théorème de l'énergie cinétique.

La solution propre à l'exercice consiste à calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle dans le repère en mouvement. Il vient :

$$E_c = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 \quad ,$$

$$E_p = Mgz - \frac{1}{2} M\omega^2 HP^2 = MgR \cos(\theta) - \frac{1}{2} M\omega^2 (d - R \sin(\theta))^2 \quad ,$$

la constante étant donnée par  $cte = (E_c + E_p)_{t=0}$ . Ce qui amène naturellement à la relation (2).

3) On utilise l'équation (2) pour obtenir :

$$F(\theta) = 1; \quad G(\theta) = \frac{2g}{R} \cos(\theta) + 2\omega^2 \frac{d}{R} \sin(\theta) - \omega^2 \sin^2(\theta); \quad E_0 = \frac{2g}{R}.$$

Ces coefficients sont entré dans le fichier i41032.eqd qui peut être lu et traité par le logiciel Equadif. Le tracé de  $G(\theta) - E_0$  pour différentes valeurs de  $\omega$  (1 ; 3 ; 5 et 10 rd/s) donne la figure ci-dessous.

L'étudiant doit évidemment préciser comment se déterminent les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité puis discuter en fonction des courbes affichées par le logiciel.

Les position d'équilibre sont données par

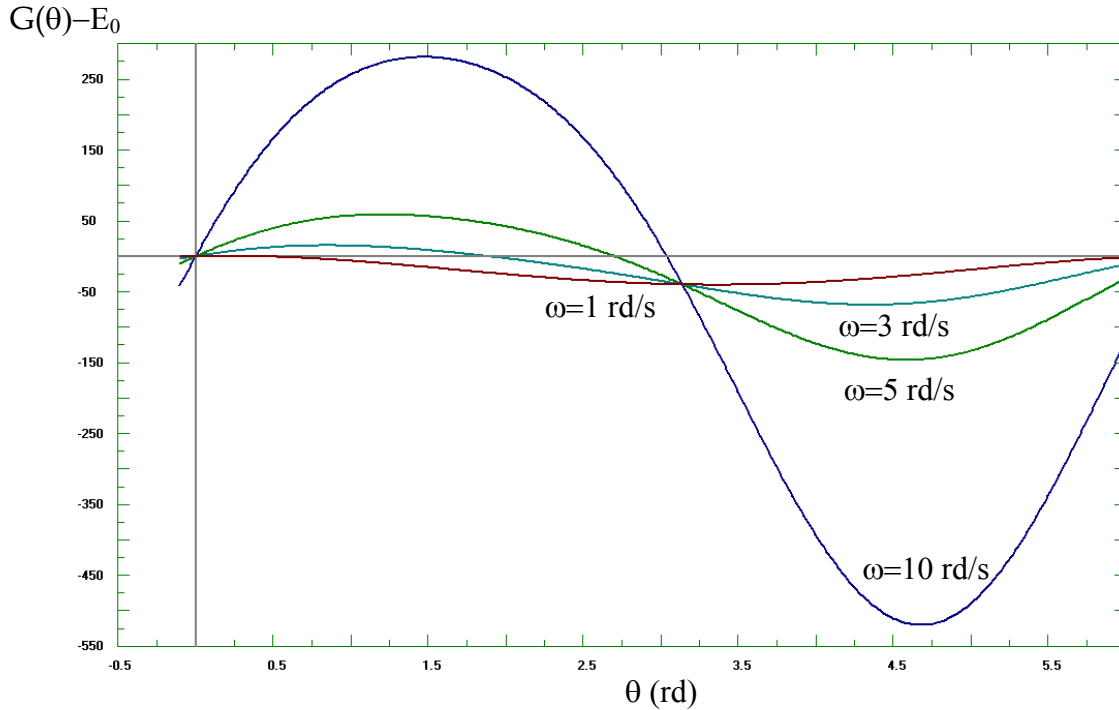
$$\frac{dG(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{et la stabilité par} \quad \frac{d^2G(\theta)}{d\theta^2} > 0 \quad .$$

avec

$$\frac{dG(\theta)}{d\theta} = -\frac{2g}{R} \sin(\theta) + 2\omega^2 \cos(\theta) \left[ \frac{d}{R} - 2 \sin(\theta) \right] \quad , \quad (4)$$

et

$$\frac{d^2G(\theta)}{dt^2} = -\frac{2g}{R} \cos(\theta) - 2\omega^2 \left[ \frac{d}{R} \sin(\theta) + 2 \cos(2\theta) \right] \quad (5)$$



On peut constater sur la figure que, quelque soit  $\omega$ , il existe deux extréma correspondant à des positions d'équilibre. On peut prendre le cas  $\omega = 10$  rd/s comme départ de la discussion.

Pour  $\omega$  grand il existe un minimum (position d'équilibre stable) pour  $\theta \approx 3\pi/2$  et un maximum (position d'équilibre instable) pour  $\theta \approx \pi/2$ . Ce minimum et maximum se décalent vers  $\theta \approx \pi$  et  $\theta \approx 0$ , respectivement, lorsque  $\omega$  décroît.

L'interprétation passe par l'étude de la compétition entre le poids et la force d'inertie d'entraînement. Lorsque le poids domine, pour de petites valeurs de  $\omega$ , le mouvement les deux positions d'équilibre sont en  $\theta \approx \pi$  (stable) et  $\theta \approx 0$  (instable). En effet, dans ce cas, c'est le premier terme du second membre des équations (4)-(5) qui est prédominant. Lorsque la force centrifuge domine, pour de grandes valeurs de  $\omega$ , les deux positions d'équilibre sont  $\theta \approx 3\pi/2$  (stable) et  $\theta \approx \pi/2$  (instable) car, dans ce cas, c'est le second terme du second membre des équations (4)-(5) qui l'emporte.

4) Les composantes de la réaction du cerceau se calculent à partir de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{N} = -M \vec{g} - M\omega^2 \vec{HP} + 2M\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} - M \frac{d^2\vec{OP}}{dt^2}$$

Bien que perpendiculaire à la circonférence puisque le mouvement s'effectue sans frottement, la réaction du cerceau a trois composantes, une selon chacun des axes Ox, Oy, Oz.

La composante suivant Ox est due à la force de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = -2M\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} = -N_x \quad ,$$

Ce qui donne :

$$N_x = 2MR\omega \cos(\theta)\dot{\theta}$$

Les deux autres composantes ont pour expressions :

$$N_y = -M\omega^2(d - R\sin(\theta)) + MR(\sin(\theta)\dot{\theta}^2 - \cos(\theta)\ddot{\theta})$$

$$N_z = -Mg - MR(\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)\ddot{\theta})$$