Mathématiques II

PC

2010

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures   Calculatrices autorisées

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III est pour une large part indépendante des deux autres.

I Systèmes de racines

Les systèmes de racines interviennent dans divers domaines des mathématiques et en cristallographie.

Le couple $(E, \langle ., . \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\| \, . \, \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle$. On rappelle qu'une *réflexion* de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E. Pour tout élément α non nul de E, on note τ_α la réflexion de E par rapport à l'orthogonal de la droite $\mathrm{Vect}(\alpha)$.

I.A – Soit α un élément non nul de E. Montrer, pour tout vecteur x de E, l'identité :

$$\tau_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on appelle *système de racines* de F une partie non vide $\mathcal{R}$ de F vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est fini, engendre F et ne contient pas le vecteur nul ;
2. pour tout α dans $\mathcal{R}$, on a $\tau_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$;
3. pour tout α dans $\mathcal{R}$, les seuls éléments de $\mathcal{R}$ colinéaires à α sont α et $-\alpha$;
4. pour tout couple (α, β) dans $\mathcal{R}^2$, on a $2\dfrac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$.

I.B – On suppose dans cette question que l'espace E est de dimension 1.

Montrer que les systèmes de racines de E sont les ensembles $\{\alpha, -\alpha\}$, avec $\alpha \in E \setminus \{0\}$.

I.C – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n \geq 2$.

Pour tout couple (α, β) de vecteurs non nuls de E, soit $\theta_{\alpha,\beta}$ l'angle géométrique entre α et β, c'est-à-dire l'unique élément de $[0, \pi]$ donné par : $\|\alpha\|.\|\beta\| \cos\theta_{\alpha,\beta} = \langle \alpha, \beta \rangle$.

I.C.1) Soit $\mathcal{R}$ un système de racines de E et soient α, β deux éléments de $\mathcal{R}$ non colinéaires.

a) Montrer, à l'aide de la propriété 4, que : $2\dfrac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\,|\cos\theta_{\alpha,\beta}|.2\dfrac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\,|\cos\theta_{\alpha,\beta}| \leq 3$.

b) On suppose $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. Montrer que le couple (α, β) se trouve dans l'une des configurations recensées dans le tableau ci-dessous (chaque ligne correspondant à une configuration) :

$\theta_{\alpha,\beta}$	$\cos\theta_{\alpha,\beta}$	$\|\beta\|/\|\alpha\|$
$\pi/2$	0	≥ 1
$\pi/3$	$1/2$	1
$2\pi/3$	$-1/2$	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$

I.C.2) Réciproquement, on suppose qu'un couple (α, β) de vecteurs non colinéaires de E se trouve dans l'une des configurations recensées dans le tableau ci-dessus. Montrer que le réel $2\dfrac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ est un entier relatif ; en préciser la valeur.

I.D – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n = 2$.

Pour tout système de racines $\mathcal{R}$ de E, on pose

$$\theta_{\mathcal{R}} = \min\{\theta_{\alpha,\beta} \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2,\ \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta\}$$

I.D.1) Montrer que $\theta_{\mathcal{R}}$ est bien défini et est égal à $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ ou $\pi/6$.

I.D.2) Pour chaque valeur de $k \in \{2, 3, 4, 6\}$, représenter graphiquement un système de racines $\mathcal{R}_k$ tel que $\theta_{\mathcal{R}_k} = \pi/k$. *Il n'est pas nécessaire de justifier que les figures tracées représentent bien des systèmes de racines.* Quel est le cardinal de $\mathcal{R}_k$? *Aucune justification n'est attendue.*

I.E – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n = 3$.

Soient (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de E et $\mathcal{R}_0 = \{e_i - e_j \,|\, 1 \le i, j \le 3,\, i \ne j\}$.

I.E.1) Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie $\mathcal{R}_0$ est un plan vectoriel.

I.E.2) Représenter graphiquement $\mathcal{R}_0$ dans le plan $\mathrm{Vect}(\mathcal{R}_0)$. Reconnaître l'un des systèmes de racines représentés à la question I.D.2.

II Propriétés de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$

- La lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $\mathbb{K}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.
- On note respectivement $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $GL(n, \mathbb{K})$, $\mathcal{D}(n, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ formé des matrices diagonales.
- On désigne par $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ de trace nulle.
- On note I_n la matrice identité et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.
- On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est *nilpotente* s'il existe un entier naturel non nul r tel que $A^r = 0$. De la même manière, on dit qu'un endomorphisme f est *nilpotent* s'il existe un entier naturel non nul r tel que $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{r \text{ fois}} = 0$.
- Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, le *crochet* $[A, B]$ est défini par $[A, B] = AB - BA$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A : \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \\ B & \longmapsto & [A, B] \end{array}$$

- On dit qu'un triplet (X, H, Y) de trois matrices non nulles de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est un *triplet admissible* si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$[H, X] = 2X \quad ; \quad [X, Y] = H \quad ; \quad [H, Y] = -2Y$$

On pose :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

II.A – Généralités

II.A.1) Montrer que $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; en préciser la dimension.

II.A.2) Justifier que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, la matrice $[A, B]$ appartient à $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$.

II.B – Un isomorphisme

Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} j : & \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & y + z \\ y - z & -x \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

II.C – Caractérisation des matrices nilpotentes

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La matrice A est nilpotente ;

ii. Le spectre de A est égal à $\{0\}$;

iii. La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II.D – Le cas complexe

On suppose dans cette question que <u>$\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{C}$</u>.

II.D.1) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

II.D.2) Ce résultat reste-t-il vrai pour deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{C})$, avec $n \ge 3$?

II.E – Le cas réel

On suppose dans cette question que <u>$\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$.</u>

II.E.1) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$. On suppose que son polynôme caractéristique vaut $X^2 + r^2$, où r est un réel non nul.

a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL(2, \mathbb{C})$ vérifiant : $\mathrm{i} r H_0 = P^{-1} A P$. Que vaut la matrice $A^2 + r^2 I_2$?

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associé* à la matrice A, c'est-à-dire qui à un vecteur colonne u de $\mathbb{R}^2$ associe le vecteur Au. Soit w un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Prouver que la famille $\left(\frac{1}{r}f(w), w\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et donner la matrice de f dans cette base.

II.E.2) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

II.E.3) On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa structure affine euclidienne canonique et de son repère canonique. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{R})$, on note $\mathcal{Q}_A$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par l'application j possède le même polynôme caractéristique que A.

a) Soit r un réel strictement positif. Montrer que chacune des parties $\mathcal{Q}_{X_0}$, $\mathcal{Q}_{rJ_0}$ et $\mathcal{Q}_{rH_0}$ est une quadrique dont on précisera une équation.

b) Représenter graphiquement l'allure des quadriques $\mathcal{Q}_{X_0}, \mathcal{Q}_{J_0}$ et $\mathcal{Q}_{H_0}$ sur un même dessin.

II.F – Un lemme

Soient A, B et M trois éléments de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$.

II.F.1) Exprimer la trace de la matrice M^2 en fonction du déterminant de M.

II.F.2) Démontrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si la trace de la matrice M^2 est nulle.

II.F.3) On suppose que les matrices A et $[A,B]$ commutent.

Démontrer que la matrice $[A,B]$ est nilpotente.

II.G – Description des triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$

II.G.1) Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}(2,\mathbb{K})$ qui commutent avec X_0. Quelles sont les matrices M de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ qui commutent avec X_0 ?

II.G.2) Soit P une matrice de $GL(2,\mathbb{K})$. Vérifier que $(PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$ est un triplet admissible.

On se propose de démontrer que, réciproquement, tous les triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ *sont de cette forme.*

Pour toute la suite de la question II.G, soient X, H, Y trois éléments de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ tels que (X,H,Y) forme un triplet admissible.

II.G.3) Montrer en utilisant les questions II.F et II.C qu'il existe une matrice $Q \in GL(2,\mathbb{K})$ vérifiant $X = QX_0Q^{-1}$.

On fixe pour la suite de la question II.G une telle matrice $Q \in GL(2,\mathbb{K})$.

II.G.4) On définit les vecteurs $u = Q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $v = Q\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

a) En calculant le vecteur $[H,X]u$ de deux manières différentes, démontrer que u est un vecteur propre de la matrice H.

b) En calculant le vecteur $[H,X]v$ de deux manières différentes, prouver l'existence d'un scalaire t vérifiant l'identité : $H = Q\begin{pmatrix}1 & t\\0 & -1\end{pmatrix}Q^{-1}$.

c) Trouver une matrice $T \in GL(2,\mathbb{K})$ commutant avec X_0 et vérifiant la relation $H = QTH_0(QT)^{-1}$.

On pose désormais $P = QT$.

II.G.5) Soit $Y' \in \mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ telle que (X,H,Y') soit un triplet admissible.

a) Déduire de la question II.G.1 les matrices de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ qui commutent avec X.

b) Calculer les matrices $\Phi_X(Y-Y')$ et $\Phi_H(Y-Y')$.

c) En déduire que l'on a $Y' = Y$.

II.G.6) Démontrer l'identité $(X,H,Y) = (PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$.

III Systèmes de racines et triplets admissibles d'un sous-espace de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$

III.A – Diagonalisation simultanée

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

III.A.1) Soient f un endomorphisme de V diagonalisable et W un sous-espace non nul de V stable par f. Montrer que l'endomorphisme de W induit par f est diagonalisable.

III.A.2) Soient f et g deux endomorphismes de V qui commutent, c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

III.A.3) Soit I un ensemble non vide et soit $\{f_i \mid i \in I\}$ une famille d'endomorphismes de V diagonalisables commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle les matrices des endomorphismes f_i, pour $i \in I$, sont diagonales. *Indication : on pourra traiter d'abord le cas où tous les endomorphismes f_i sont des homothéties, puis raisonner par récurrence sur la dimension de V.*

III.B – Application

On reprend dans cette partie les notations de la partie II.

Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$ stable par crochet, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A},\ [A,B] \in \mathcal{A}$$

On note $\mathcal{E}$ l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}(n,\mathbb{K})$.

III.B.1) Soit H un élément de $\mathcal{E}$.

a) Calculer l'image par Φ_H de la base canonique de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$. En déduire que Φ_H est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$.

b) Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{A}$ dans laquelle les matrices des endomorphismes de $\mathcal{A}$ induits par les Φ_H, pour $H \in \mathcal{E}$, sont diagonales.

Pour toute application λ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{K}$, on pose :

$$\mathcal{A}_\lambda = \{M \in \mathcal{A} \mid \Phi_H(M) = \lambda(H)M \text{ pour tout } H \in \mathcal{E}\}$$

III.B.2) Soit λ une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{K}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

b) Montrer que si $\mathcal{A}_\lambda$ est non réduit à $\{0\}$, alors λ est une forme linéaire de $\mathcal{E}$.

On note $\mathcal{E}^*$ l'espace vectoriel des formes linéaires de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments λ de $\mathcal{E}^* \setminus \{0\}$ tels que $\mathcal{A}_\lambda$ est différent de $\{0\}$.

III.C – Un exemple

On reprend dans cette question les notations des parties I et II ainsi que de la question III.B. On suppose désormais

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \mid (A,B,C) \in (\mathcal{M}(2,\mathbb{R}))^3,\ B = {}^tB \text{ et } C = {}^tC \right\}$$

où, pour tout $M \in \mathcal{M}(2,\mathbb{R})$, le symbole ${}^tM$ désigne la transposée de M.

On a donc $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \mid D \in \mathcal{D}(2,\mathbb{R}) \right\}$.

III.C.1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4,\mathbb{R})$ stable par crochet. Montrer qu'on a $\mathcal{A}_0 = \mathcal{E}$, où $\mathcal{A}_0$ désigne $\mathcal{A}_\lambda$ lorsque λ est la forme linéaire nulle. Donner une base de $\mathcal{A}_0$.

III.C.2) Pour $k \in \{1,2\}$, on note e_k l'élément de $\mathcal{E}^*$ qui à toute matrice $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}$, où $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(2,\mathbb{R})$, associe le coefficient d_k.

a) Vérifier que (e_1,e_2) forme une base de $\mathcal{E}^*$.

On munit $\mathcal{E}^*$ de l'unique produit scalaire faisant de (e_1,e_2) une base orthonormale.

b) Soit $\mathcal{R} = \{e_1-e_2, e_2-e_1, e_1+e_2, -e_1-e_2, 2e_1, -2e_1, 2e_2, -2e_2\}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{R}$ est un système de racines de $\mathcal{E}^*$. *On pourra pour cela dessiner la partie $\mathcal{R}$ dans le plan euclidien $\mathcal{E}^*$ et reconnaître l'un des systèmes de racines rencontrés dans la question I.D*

III.C.3) Soit $\alpha \in \mathcal{R}$. Déterminer par le calcul le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_\alpha$. Vérifier que $\mathcal{A}_\alpha$ est une droite vectorielle.

III.C.4) Établir la relation $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{R}} \mathcal{A}_\alpha$.

III.C.5) Démontrer l'égalité $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}$.

III.C.6) On pose désormais $\alpha = e_1 - e_2$, $\beta = 2e_2$, $H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) En utilisant les résultats de la question III.C.3, montrer qu'il existe un couple $(X_\alpha, X_{-\alpha}) \in \mathcal{A}_\alpha \times \mathcal{A}_{-\alpha}$ et un couple $(X_\beta, X_{-\beta}) \in \mathcal{A}_\beta \times \mathcal{A}_{-\beta}$ tels que $(X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha})$ et $(X_\beta, H_\beta, X_{-\beta})$ soient des triplets admissibles de $\mathcal{A}$.

On fixe deux tels triplets admissibles.

b) Montrer que $\mathcal{A}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4,\mathbb{R})$ stable par crochet et contenant les matrices X_α, H_α, $X_{-\alpha}$, X_β, H_β et $X_{-\beta}$.

• • • FIN • • •