NB : La préparation dure entre 25 et 30 minutes environ, de même que la présentation au tableau.
Les exercices doivent être cherchés dans l'ordre de l'énoncé. La présentation de vos résultats au tableau se fera dans cet ordre-là. En cas de blocage *cependant, vous pouvez aborder la question ou l'exercice suivant. La calculatrice est autorisée.*
Merci de ne pas écrire sur le sujet, qui (comme vos brouillons) restera dans la salle à l'issue de l'épreuve.

Exercice I

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note p et q ses deux racines carrées. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P et Q d'affixes respectives z, p et q forment un triangle rectangle en M.

Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in S_n^+$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\,AX \geq 0$.
2) Montrer que
$$\forall M \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall \lambda > \alpha,\ M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$
3) Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $S_n(\mathbb{R})$.

On considère $\varphi \in \mathcal{L}(S_n)$ telle que $\varphi(S_n^{++}) = S_n^{++}$.

4) Donner des exemples de telles applications φ.
5) Montrer que $\varphi \in GL(S_n(\mathbb{R}))$.
6) Déduire de ce qui précède que $\varphi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
7) On suppose dans cette question que $n = 2$ et $\varphi(I_2) = I_2$. Montrer que
$$\forall M \in S_2(\mathbb{R}),\ \chi_{\varphi(M)} = \chi_M$$
où χ désigne le polynôme caractéristique.

★ ★ ★

NB : La préparation dure entre 25 et 30 minutes environ, de même que la présentation au tableau.
Les exercices doivent être cherchés dans l'ordre de l'énoncé. La présentation de vos résultats au tableau se fera dans cet ordre-là. En cas de blocage *cependant, vous pouvez aborder la question ou l'exercice suivant. La calculatrice est autorisée.*
Merci de ne pas écrire sur le sujet, qui (comme vos brouillons) restera dans la salle à l'issue de l'épreuve.

Exercice I

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1. Montrer que l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$$

définit un endomorphisme et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^p = 0$.

2. En déduire pour tout polynôme P de degré $< n$ la relation

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j) = 0.$$

Exercice II

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On considère u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u c'est-à-dire que si F est un sous-espace propre de v, on a $u(F) \subset F$.
2. Montrer que u induit sur chaque sous-espace propre de v un endomorphisme diagonalisable.
3. En déduire l'existence d'une base commune de réduction dans E pour les endomorphismes u et v, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que celle ci soit une base de vecteurs propres à la fois de u et de v.
4. Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{K})$. On considère les assertions
   $i)$ A et B commutent.
   $ii)$ $A + \lambda B$ est diagonalisable, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (a) Montrer que $i) \Longrightarrow ii)$.
   (b) Montrer que la réciproque est fausse pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que la réciproque est vraie pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

★ ★ ★

NB : La préparation dure entre 25 et 30 minutes environ, de même que la présentation au tableau.
Les exercices doivent être cherchés dans l'ordre de l'énoncé. La présentation de vos résultats au tableau se fera dans cet ordre-là. En cas de blocage *cependant, vous pouvez aborder la question ou l'exercice suivant. La calculatrice est autorisée.*
Merci de ne pas écrire sur le sujet, qui (comme vos brouillons) restera dans la salle à l'issue de l'épreuve.

Exercice I

On pose

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \ .$$

La série $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ est-elle convergente ?

Exercice II

On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{x + \sin^2 t} \, \mathrm{d}t \ . \end{array}$$

1. Montrer que F est bien définie, puis étudier sa monotonie.
2. Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
3. Étudier $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$.
4. Déterminer un équivalent simple de $F(x)$ quand $x \to 0$.
   Indication : on pourra effectuer le changement de variable $\theta = \tan t$ sur des intervalles convenables.

★ ★ ★

NB : La préparation dure entre 25 et 30 minutes environ, de même que la présentation au tableau. Les exercices doivent être cherchés dans l'ordre de l'énoncé. La présentation de vos résultats au tableau se fera dans cet ordre-là. En cas de blocage *cependant, vous pouvez aborder la question ou l'exercice suivant. La calculatrice est autorisée.*
Merci de ne pas écrire sur le sujet, qui (comme vos brouillons) restera dans la salle à l'issue de l'épreuve.

Exercice I

On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$, donner $f(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.
2. On suppose maintenant que f est continue en 0. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Même question en supposant seulement f bornée sur un voisinage de 0.

Exercice II

Pour tout entier $n \geq 0$ on considère le coefficient u_n de X^n dans $(1+X+X^2)^n$.

1. Montrer que $u_n \leq 3^n$.
2. En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de la série des $u_n z^n$. La somme est notée $f(z)$ là où elle est définie.
3. On considère également le coefficient v_n de X^{n+1} dans $(1+X+X^2)^n$. Montrez que c'est aussi celui de X^{n-1} dans $(1+X+X^2)^n$. Montrez en dérivant $(1+X+X^2)^n$ que $u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1}$ et que $(n+1)v_n = n(2u_{n-1} + v_{n-1})$ pour $n > 0$.
4. En déduire $(n+1)u_{n+1} = (2n+1)u_n + 3nu_{n-1}$.
5. Quelle équation différentielle satisfait f ? Que vaut $f(x)$ pour $x \geq 0$?

★ ★ ★