Concours Centrale - Supélec 2010

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PSI

Calculatrices autorisées

Définitions et notations

Dans tout le texte, n est un entier strictement positif et E est un espace euclidien de dimension n ; on note $< x, y >$ le produit scalaire de deux éléments x et y de E ; La norme utilisée est la norme euclidienne associée.

- $\mathscr{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Si f et g sont dans $\mathscr{L}(E)$, fg désigne la composée $f \circ g$ des applications et f^* désigne l'endomorphisme adjoint de f.
- Le symbole 0 désigne indifféremment l'élément nul de $\mathbb{R}$, de E ou de $\mathscr{L}(E)$.
- $GL(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E. C'est un groupe pour la composition des applications. L'application identité est notée Id_E.
- On appelle *endomorphisme antisymétrique* de E tout endomorphisme de E tel que $f^* = -f$. L'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. On pourra utiliser cette propriété sans démonstration.
- On appelle similitude de E tout endomorphisme f de E du type λg avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in O(E)$, où $O(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. On rappelle que $O(E)$ est un groupe pour la composition des applications. On désigne par $\mathrm{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E.

Objectif du problème

Le but du problème est de calculer l'entier d_n défini de la manière suivante :
E étant un espace euclidien de dimension n, d_n est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ c'est-à-dire d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ formé de similitudes.

Note : on peut démontrer – et nous l'admettrons – que la notation d_n est licite, car cet entier ne dépend effectivement que de la dimension de E.

- version du 11 décembre 2009 14h59

Partie I - Premières propriétés

I.A - Étude de $\mathrm{Sim}(E)$

I.A.1) Montrer que l'ensemble des similitudes non nulles est un sous-groupe de $GL(E)$ pour la composition des applications.

I.A.2) Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) h est élément de $\mathrm{Sim}(E)$;

ii) h^*h est colinéaire à Id_E ;

iii) la matrice de h dans une base orthonormale de E est colinéaire à une matrice orthogonale.

On appelle donc *matrice de similitude* toute matrice colinéaire à une matrice orthogonale : c'est donc la matrice d'une similitude dans une base orthormale.

I.B - Propriétés des endomorphismes antisymétriques

Soit f un endomorphisme antisymétrique de E.

I.B.1) Montrer que : $\forall x \in E, < x, f(x) >= 0$.

I.B.2) Montrer que, si S est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $S^\perp$ est stable par f. Montrer que les endomorphismes induits par f sur S et sur $S^\perp$ sont antisymétriques.

I.B.3) Soit g un endomorphisme antisymétrique de E, tel que $fg = -gf$.

Montrer que : $\forall x \in E, < f(x), g(x) >= 0$.

I.B.4) Que vaut $f^2 = f \circ f$ si f est un automorphisme orthogonal et antisymétrique de E ?

I.C - Encadrement de d_n

I.C.1) Montrer que $d_n \geqslant 1$.

I.C.2) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$.

On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. En considérant $\Phi : f \mapsto f(x)$, application linéaire de V dans E, montrer que $\dim(V) \leqslant n$.

Ainsi $1 \leqslant d_n \leqslant n$.

I.C.3) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$. Expliciter un espace vectoriel de dimension 2, formé de matrices de similitudes. En déduire, avec soin, que $d_2 = 2$.

I.C.4) Dans cette question seulement, on suppose n impair. Si f, g appartiennent à $GL(E)$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f + \lambda g$ soit non inversible.

On pourra raisonner en considérant le polynôme caractéristique de fg^{-1}.

En déduire que $d_n = 1$.

I.C.5) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$, de dimension $d \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel W de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$, de même dimension d, et contenant Id_E.

C'est pourquoi, dans toute la suite, on s'intéressera uniquement à des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$, inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ *et contenant* Id_E.

I.D - Systèmes anti-commutatifs d'endomorphismes antisymétriques

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ contenant Id_E, inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ et de dimension $d \geqslant 2$.

Soit $(\mathrm{Id}_E, f_1, ..., f_{d-1})$ une base de V.

I.D.1) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d-1\}$, $f_i^* + f_i$ est colinéaire à Id_E.

I.D.2) Montrer qu'il existe une base $(\mathrm{Id}_E, g_1, ..., g_{d-1})$ de V telle que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d-1\}$, g_i soit antisymétrique (on cherchera g_i comme combinaison de f_i et id_E).

I.D.3) On fixe une base $(\mathrm{Id}_E, g_1, ..., g_{d-1})$ de V comme définie à la question précédente c'est-à-dire avec pour tout i, g_i antisymétrique.

a) Montrer que pour tout $i \neq j$, $g_i g_j + g_j g_i$ est colinéaire à Id_E.

b) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathscr{L}(E)$ en posant, pour tout f, g de $\mathscr{L}(E)$ $(f|g) = tr(f^* g)$.

On considère, dans la suite de cette question, une base $(h_1, ..., h_{d-1})$ de $\mathrm{Vect}(g_1, ..., g_{d-1})$ *orthogonale pour ce produit scalaire.*

c) Montrer que les h_i sont antisymétriques et vérifient : $\forall i \neq j,\ h_i h_j + h_j h_i = 0$.

Que faire pour que les h_i soient aussi des automorphismes orthogonaux ?

I.D.4) Réciproquement, soit $(h_1, ..., h_{d-1})$ une famille de $\mathscr{L}(E)$ telle que les h_i soient des automorphismes orthogonaux antisymétriques vérifiant pour tous $i \neq j$, $h_i h_j + h_j h_i = 0$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, h_1, ..., h_{d-1})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, de dimension d, inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$.

Ainsi, si $\dim(E) \geqslant 2$, sont équivalentes les deux propriétés :

- il existe un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension $d \geqslant 2$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$
- il existe une famille $(f_1, ..., f_{d-1})$ d'automorphismes orthogonaux antisymétriques de E vérifiant :
$$\forall i \neq j,\ f_i f_j + f_j f_i = 0.$$

Partie II - Étude dans des dimensions paires

II.A - Dans cette section, $\dim(E) = 2p$ où p est un entier impair.

II.A.1) Soit p un entier impair tel que $\dim(E) = n = 2p$. On suppose qu'il existe $d \geqslant 3$ et une famille $(f_1, f_2, ..., f_{d-1})$ d'éléments de $\mathscr{L}(E)$ telle que les f_i soient des automorphismes orthogonaux, antisymétriques vérifiant : $\forall i \neq j,\ f_i f_j + f_j f_i = 0$.

Soit $x \in E$ de norme 1.

a) Montrer que $(x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x))$ est une famille orthonormale, et

que $S = \mathrm{Vect}\big(x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)\big)$ est stable par f_1 et f_2.

b) En déduire que $d_{n-4} \geqslant 3$

II.A.2) Dans cette question, $n = 2p$, avec p entier impair. Montrer que $d_n = 2$.

II.B - Dans cette section, la dimension de E est 4.

II.B.1) On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension 4 inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$.

On considère alors, conformément à I.D.4 une famille (f_1, f_2, f_3) d'éléments de $\mathscr{L}(E)$ telle que les f_i soient des automorphismes orthogonaux, antisymétriques vérifiant : $\forall i \neq j,\ f_i f_j + f_j f_i = 0$

Soit un vecteur fixé $x \in E$ de norme 1.

a) Justifier que la famille $B = \big(x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)\big)$ est une base de E puis montrer qu'il existe des nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tel que :

$$f_3(x) = \alpha x + \beta f_1(x) + \gamma f_2(x) + \delta f_1 f_2(x).$$

Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et que $\delta \in \{-1, 1\}$.

b) Montrer que $f_3 = \delta f_1 f_2$. Quitte à changer f_3 en son opposé, on suppose dans la suite que $f_3 = f_1 f_2$.

c) Si x_0, x_1, x_2, x_3 sont des nombres réels, donner la matrice $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ dans B de l'endomorphisme $x_0 \mathrm{Id}_E + x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$.

II.B.2) Vérifier que pour tout $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ est une matrice de similitude. Qu'en conclure ?

II.C - Dans cette section, la dimension de E est 12

On suppose qu'il existe dans $\mathscr{L}(E)$, une famille (f_1, f_2, f_3, f_4) d'automorphismes orthogonaux antisymétriques vérifiant : $\forall i \neq j,\ f_i f_j + f_j f_i = 0$.

II.C.1) En utilisant f_4, montrer que f_3 ne peut être égal à $\pm f_1 f_2$.

II.C.2) Montrer que $f_1 f_2 f_3$ est un automorphisme orthogonal, symétrique et non colinéaire à Id_E.

II.C.3) Quel est le spectre de $f_1 f_2 f_3$?
Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 tel que $< f_1 f_2 f_3(x), x >= 0$.

On fixe un tel x pour la suite.

II.C.4) Montrer que $F = (x, f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_1 f_2(x), f_1 f_3(x), f_2 f_3(x), f_1 f_2 f_3(x))$ est une famille orthonormale.

II.C.5) On pose $V = \mathrm{Vect}(F)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 8.

a) Montrer que $V^\perp$ est stable par f_1, f_2, f_3.

b) On note f_i' l'endomorphisme induit par f_i sur $V^\perp$, $i = 1, 2, 3$.
Justifier qu'il existe $\delta' \in \{-1, 1\}$ tel que $f_3' = \delta' f_1' f_2'$.

Quitte à remplacer f_3 par $-f_3$, on considère pour la suite que $f_3' = f_1' f_2'$.

c) Soit e fixé dans $V^\perp$, de norme 1. En procédant comme au II.B.1.a) (mais ce n'est pas à refaire), on peut montrer que $(e, f_1(e), f_2(e), f_1 f_2(e))$ et une base orthonormale de $V^\perp$. En remarquant que $f_3(e) = f_1 f_2(e)$, utiliser cette base pour montrer que : $\forall y \in V^\perp,\ f_4(y) \in V$.

Ainsi $W = f_4(V^\perp)$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension 4.

d) Montrer que la somme de W et $V^\perp$ est directe et que $W \oplus V^\perp$ est stable par f_1, f_2, f_3, f_4. Aboutir alors à une contradiction.

II.C.6) En déduire la valeur de d_{12}.

II.D - Dans cette section, la dimension de E est 8

Montrer que, quel que soit $(x_0, ..., x_7) \in \mathbb{R}^8$,

$$\begin{pmatrix}
x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_4 & -x_3 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\
x_1 & x_0 & -x_4 & x_2 & -x_5 & x_3 & -x_7 & x_6 \\
x_2 & x_4 & x_0 & -x_1 & -x_6 & x_7 & x_3 & -x_5 \\
x_4 & -x_2 & x_1 & x_0 & x_7 & x_6 & -x_5 & -x_3 \\
x_3 & x_5 & x_6 & -x_7 & x_0 & -x_1 & -x_2 & x_4 \\
x_5 & -x_3 & -x_7 & -x_6 & x_1 & x_0 & x_4 & x_2 \\
x_6 & x_7 & -x_3 & x_5 & x_2 & -x_4 & x_0 & -x_1 \\
x_7 & -x_6 & x_5 & x_3 & -x_4 & -x_2 & x_1 & x_0
\end{pmatrix}$$

est une matrice de similitude.

Que peut-on en déduire ?

II.E - Conjecture du résultat général

Conjecturer la valeur de d_n dans le cas général.

• • • FIN • • •
