PHYSIQUE I

Calculatrices autorisées

Données numériques			
Charge d'un électron (valeur absolue)	$q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C	Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3 \cdot 10^{8}$ m $\cdot$ s^{-1}
Masse d'un électron	$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$kg	Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H $\cdot$ m^{-1}

Ce problème porte sur l'étude sommaire du confinement d'un électron (de masse m et de charge $-q$) dans une petite région de l'espace à l'aide d'un champ électromagnétique. On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne et on néglige toutes les forces autres que les forces électromagnétiques. L'électron se déplace dans le référentiel $\mathscr{R}(Oxyz)$, supposé galiléen ; on appelle respectivement $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz. Suivant les questions, on repérera un point M de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindriques (r, θ, z) avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Partie I - Mouvement de l'électron dans un champ magnétique uniforme

L'électron, se déplaçant dans le vide, est soumis à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent (indépendant du temps). Le champ magnétique $\vec{B}$ est colinéaire à Oz : $\vec{B} = B\vec{e}_z (B > 0)$. On pose $\omega_c = qB/m$.

À l'instant initial, l'électron se trouve en O avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{e}_x + v_{oz}\vec{e}_z$ (v_{ox} et v_{oz} désignent des constantes positives).

I.A - Déterminer la coordonnée $z(t)$ de l'électron à l'instant t.

I.B - On étudie la projection du mouvement de l'électron dans le plan Oxy.

I.B.1) Déterminer les composantes v_x et v_y de la vitesse de l'électron en fonction de v_{ox}, ω_c et du temps t.

I.B.2) En déduire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à l'instant t.

I.B.3) Montrer que la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan Oxy est un cercle Γ de centre H et de rayon r_H. Déterminer les coordonnées x_H et y_H de H, le rayon r_H et la fréquence de révolution f_c de l'électron sur ce cer-

Filière TSI

cle en fonction de v_{ox} et ω_c. Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan Oxy. Préciser en particulier le sens de parcours de l'électron sur Γ.

I.C - *Application numérique* : calculer la fréquence f_c pour $B = 1,0\ \mathrm{T}$.

I.D - Tracer l'allure de la trajectoire de l'électron dans l'espace. L'électron est-il confiné au voisinage de O ?

Partie II - Mouvement de l'électron dans un champ électrique quadrupolaire

À l'aide d'électrodes de forme appropriée (cf figures 1 et 2), on crée autour du point O, dans une zone vide de charges, un champ électrostatique $\vec{E}$ quadrupolaire de révolution autour de l'axe Oz, dérivant du potentiel :

$U(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1(x^2 + y^2) + \alpha_2 z^2$ où α_0, α_1 et α_2 sont des constantes.

On peut également mettre U sous la forme $U(r, z) = \alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 z^2$.

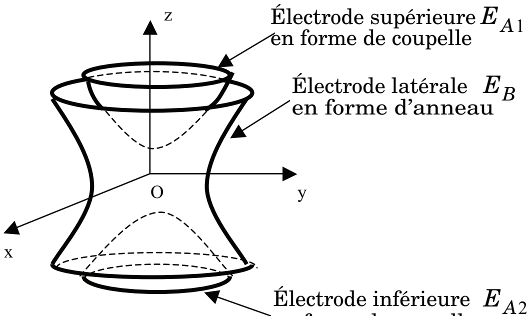

Figure 1

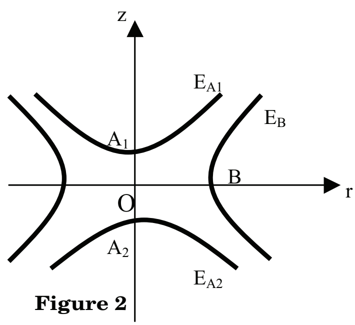

Figure 2

Coupe des électrodes dans le plan méridien

II.A - Étude du potentiel U et du champ $\vec{E}$

II.A.1) À quelle équation aux dérivées partielles doit satisfaire le potentiel U ?

II.A.2) En déduire une relation entre α_2 et α_1.

II.A.3) Les surfaces internes des 2 électrodes E_{A1} et E_{A2}, de révolution autour de Oz, ont pour équation : $r^2 - 2z^2 = -2z_0^2$ (les points A_1 et A_2 de la figure 2 ont respectivement pour ordonnées $+z_0$ et $-z_0$ sur l'axe Oz). Ces 2 électrodes sont au potentiel nul (cf figure 3). La surface interne de l'électrode latérale E_B également de révolution autour de Oz, a pour équation : $r^2 - 2z^2 = r_0^2$ (le point B de la figure 2 est à la distance r_0 de l'axe Oz). Cette électrode est au potentiel $V_0 (V_0 > 0)$. On définit la constante positive d par $4d^2 = r_0^2 + 2z_0^2$.

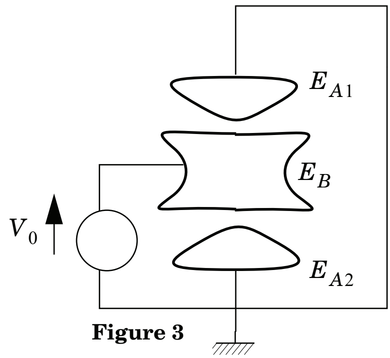

Figure 3

Exprimer le potentiel $U(r, z)$ en fonction de d, z_0, V_0, r et z.

II.A.4) Représenter, au voisinage du point O, dans le plan méridien rOz (voir Figure 2), les lignes équipotentielles (préciser en particulier les lignes équipotentielles qui passent par O) et les lignes de champ en justifiant brièvement le schéma. Préciser également le sens du champ $\vec{E}$ sur les lignes de champ.

II.A.5) Représenter, au voisinage du point O, dans le plan Oxy, les lignes équipotentielles et les lignes de champ, en précisant le sens du champ $\vec{E}$ sur les lignes de champ.

II.A.6) Calculer les composantes cartésiennes E_x, E_y et E_z du champ $\vec{E}$ en un point M en fonction de d, V_0, x, y, z.

II.B - On considère le mouvement de l'électron dans le champ quadrupolaire

II.B.1) Écrire les trois équations différentielles du mouvement en projection sur les axes Ox, Oy et Oz. On introduira la constante

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{qV_0}{md^2}}.$$

II.B.2) Montrer que le mouvement de l'électron suivant Oz (mouvement longitudinal) est périodique et déterminer sa fréquence f_0 en fonction de ω_0.

II.B.3) *Application numérique* : $r_0 = 3,0\ \text{mm}$, $z_0 = 2,0\ \text{mm}$, $V_0 = 10\ \text{V}$. Calculer f_0. Comparer les valeurs numériques de f_0 et de f_c.

II.B.4) Montrer que le mouvement de l'électron dans le plan Oxy (mouvement transversal) n'est pas borné. Il n'y a donc pas confinement de l'électron au voisinage de O dans le champ quadrupolaire.

Partie III - Mouvement de l'électron dans les champs magnétique et électrique

L'électron est maintenant soumis simultanément au champ magnétique $\vec{B}$ de la Partie I et au champ électrique quadrupolaire $\vec{E}$ de la Partie II.

III.A - Écrire les trois équations différentielles du mouvement en projection sur les axes Ox, Oy et Oz. On utilisera les constantes ω_c et ω_0.

III.B - Montrer que le mouvement longitudinal suivant l'axe Oz, déterminé à la question II.B.2) n'est pas modifié.

III.C - Pour déterminer le mouvement transversal dans le plan Oxy, on utilise la variable complexe $\underline{u} = x + iy$.

III.C.1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{u}$.

III.C.2) Montrer que l'électron sera confiné autour de O si la pulsation ω_c est supérieure à une certaine valeur ω_{c0} que l'on exprimera en fonction de ω_0. En déduire la valeur minimale B_0 de B qui permet le confinement de l'électron. Exprimer B_0 en fonction de V_0, d, m et q.

III.C.3) On suppose dorénavant $\omega_c \gg \omega_0$, ce qu'indiquaient les valeurs numériques précédentes. Déterminer, dans ce cas, u en fonction de deux pulsations ω_1 et ω_2, $(\omega_1 < \omega_2)$ du temps t et de deux constantes d'intégration A_1 et A_2 qu'on ne cherchera pas à déterminer (la constante A_1 est associée à la pulsation ω_1 et la constante A_2 à la pulsation ω_2). Exprimer ω_1 et ω_2 en fonction de ω_0 et ω_c (compte tenu de $\omega_c \gg \omega_0$).

III.C.4) *Application numérique* : calculer les fréquences f_1 et f_2 associées aux pulsations ω_1 et ω_2.

III.C.5) Montrer qu'à chaque pulsation ω_1 ou ω_2 est associé un mouvement circulaire de l'électron.

III.D - Le mouvement de l'électron apparaît donc comme la superposition de trois mouvements : (1) un mouvement circulaire à la pulsation ω_1 dans le plan Oxy ; (2) un second mouvement circulaire à la pulsation ω_2 dans le plan Oxy ; (3) un mouvement sinusoïdal longitudinal à la pulsation ω_0 le long de l'axe Oz.

Compte tenu des valeurs numériques des différentes pulsations et en supposant A_2 nettement plus petit que A_1, tracer l'allure de la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan Oxy, puis l'allure générale de la trajectoire dans l'espace.

Partie IV - Amortissement du mouvement de l'électron par rayonnement

Toute particule chargée accélérée émet une onde électromagnétique. L'énergie de ce rayonnement étant prélevée sur l'énergie mécanique, il en résulte un amortissement des oscillations qu'on se propose de caractériser dans cette partie.

IV.A - On considère le mouvement longitudinal de l'électron suivant l'axe Oz.

IV.A.1) Montrer qu'à ce mouvement, de pulsation ω_0, on peut associer une énergie mécanique

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 z^2 .$$

IV.A.2) L'amplitude des oscillations variant lentement, on définit l'amplitude quadratique moyenne $z_m(t)$ des oscillations de l'électron par :

$$z_m^2(t) = \frac{1}{T_0}\int_t^{T_0+t} z(t')^2 dt' \text{, avec } T_0 = 2\pi/\omega_0 .$$

Exprimer $\mathcal{E}(t)$ en fonction de m, ω_0 et $z_m(t)$; puis en fonction de m, ω_0 et de la valeur quadratique moyenne $a_m(t)$ de l'accélération longitudinale de l'électron suivant Oz, d^2z/dt^2.

IV.A.3) La puissance moyenne $P_m(t)$ rayonnée par l'électron est donnée par la relation :

$$P_m(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c}q^2 a_m^2(t) .$$

De ce fait, l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ diminue lentement avec une constante de temps τ_0 très grande devant la période T_0 d'oscillation de l'électron suivant Oz.

Écrire l'équation qui lie $\mathcal{E}$ et P_m et en déduire l'équation différentielle que vérifie l'énergie $\mathcal{E}(t)$.

IV.A.4) Montrer que l'énergie décroît de manière exponentielle et exprimer la constante de temps τ_0 en fonction de m, q, c, μ_0 et ω_0.

IV.A.5) *Application numérique* : calculer τ_0 et comparer la valeur obtenue à celle de la période T_0.

IV.B - On considère le mouvement transversal de l'électron dans le plan Oxy

On admet (même si cela n'est pas tout à fait vrai, les ordres de grandeur sont respectés) que les résultats précédents sont transposables directement et indépendamment aux deux mouvements circulaires de pulsations ω_1 et ω_2 ; on suppose donc que l'expression de la constante de temps τ en fonction de la pulsation ω (cf question IV.A.4) est inchangée.

IV.B.1) *Application numérique* : calculer les constantes de temps τ_1 et τ_2 associées respectivement aux mouvements circulaires de pulsations ω_1 et ω_2.

IV.B.2) Expliquer pourquoi on peut ainsi supposer que le mouvement circulaire associé à la pulsation ω_2 a un rayon B nettement plus petit que celui A associé à la pulsation ω_1 (cf question III.D).

Partie V - Étude élémentaire de la détection du mouvement longitudinal de l'électron

Dans cette partie, on considère uniquement le mouvement longitudinal de l'électron suivant Oz et on ne tient pas compte de l'amortissement de ce mouvement dû au rayonnement.

L'oscillation de l'électron suivant Oz provoque une variation des charges des électrodes et donc un courant dans le circuit électrique extérieur aux électrodes (tout comme une variation de charges des armatures d'un condensateur produit un courant dans le circuit extérieur au condensateur). Ce courant peut dissiper de l'énergie par effet Joule dans la résistance du circuit. Par suite, l'énergie mécanique de l'électron diminue, ce que l'on peut modéliser en ajoutant à la force électromagnétique qui agit sur l'électron $-m\omega_0^2 z\vec{e}_z$ (cf Partie III), une force supplémentaire $\vec{F}$, de frottement.

On considère le circuit de la figure 4 où on a ajouté une résistance R et un générateur de tension sinusoïdale $V_1 = V_{10}\cos\omega t$; I désigne l'intensité du courant dans la résistance R.

On admet que la force $\vec{F}$ a pour expression

$$\vec{F} = \alpha\frac{q}{2d}(V_1 - RI)\vec{e}_z \text{, avec}$$

$$I = \alpha\frac{q}{2d}\frac{dz}{dt} \text{ ;}$$

α désigne un coefficient caractéristique de la forme des électrodes.

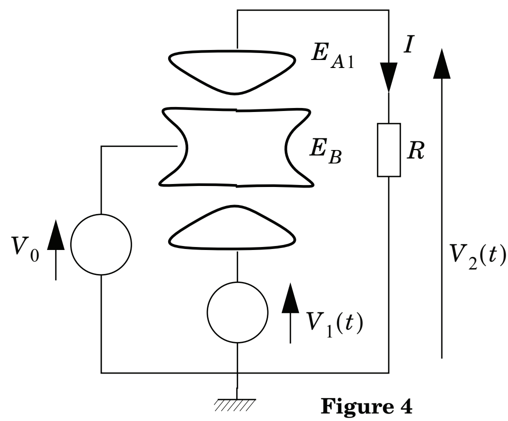

Figure 4

V.A - Quelle est l'unité du coefficient α ? Justifier brièvement votre réponse.

V.B - Écrire la nouvelle équation différentielle qui régit le mouvement longitudinal de l'électron suivant Oz.

V.C - On définit le facteur de qualité Q du système par $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{m}\left(\frac{\alpha q}{2d}\right)^2$.
En déduire l'équation différentielle que vérifie la tension $V_2(t)$ aux bornes de la résistance R. On fera apparaître les constantes ω_0 et Q dans cette équation.

V.D - On se place en régime sinusoïdal établi. Dans ces conditions, la tension $V_2(t)$ peut se mettre sous la forme $V_2(t) = V_{2c}\cos\omega t + V_{2s}\sin\omega t$, V_{2c} et V_{2s} désignant deux constantes indépendantes du temps.

V.D.1) Déterminer, en notation complexe, la tension $\underline{V_2(t)}$.

V.D.2) En déduire l'expression des amplitudes V_{2c} et V_{2s} en fonction de V_{10}, Q, ω_0 et de la pulsation ω.

V.D.3) Tracer l'allure des amplitudes V_{2c} et V_{2s} en fonction de la pulsation ω. L'étude de ces courbes permet d'avoir les informations sur le mouvement longitudinal de l'électron suivant Oz.

V.E - L'analyse des amplitudes V_{2c} et V_{2s} est réalisée par détection synchrone. Le principe de cette méthode est expliqué figure 5.

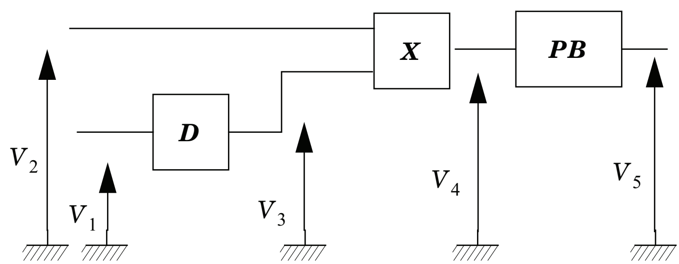

Figure 5

- Un circuit déphaseur D ajoute un déphasage φ à la tension $V_1(t) = V_{10}\cos\omega t$ ($V_1(t)$ est identique à la tension délivrée par le générateur relié à l'électrode E_{A2}).
- Un circuit multiplieur X, alimenté par la tension $V_2(t)$ que l'on souhaite analyser et par la tension $V_3(t)$ issu du circuit déphaseur, délivre une tension $V_4(t) = K\ V_2(t)V_3(t)$, K désignant une constante positive caractéristique du multiplieur.
- Un filtre passe-bas PB permet de filtrer la composante variable de la tension $V_4(t)$.

V.E.1) Un circuit déphaseur D est représenté figure 6. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire. Les résistances R_1 et R_2 sont fixées et la capacité C_2 est réglable.

a) Déterminer, en notation complexe, la fonction de transfert de ce circuit :

$$\underline{H_D}(\omega) = \frac{\underline{V_3(t)}}{\underline{V_1(t)}}$$

b) En déduire que la tension $V_3(t)$ est de la forme $V_3(t) = V_{10}\cos(\omega t + \varphi)$. Pour une pulsation ω donnée, tracer l'allure du déphasage φ en fonction de la capacité C_2.

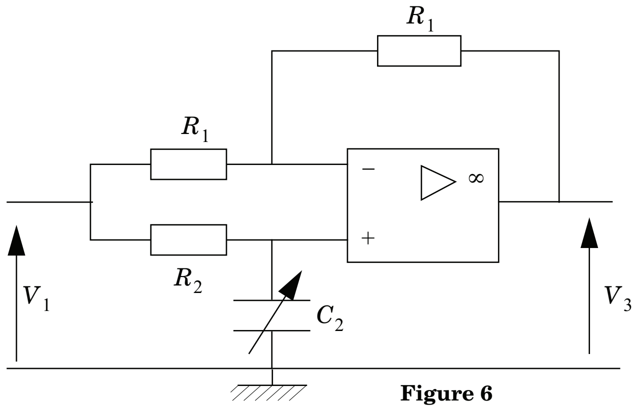

Figure 6

V.E.2) Écrire la tension $V_4(t)$ à la sortie du multiplieur sous la forme : $V_4(t) = V_{40} + V_{41}(t)$ où V_{40} désigne la composante continue de $V_4(t)$ et $V_{41}(t)$ sa composante variable. Exprimer V_{40} en fonction de K, V_{10}, V_{2C}, V_{2s}, φ et $V_{41}(t)$ en fonction de K, V_{10}, V_{2C}, V_{2s}, φ, ω et t.

V.E.3) Un filtre passe-bas PB est représenté figure 7.

a) Déterminer, en notation complexe, la fonction de transfert

$$\underline{H_{PB}}(\omega) = \frac{\underline{V_5(t)}}{\underline{V_4(t)}}$$ de ce circuit.

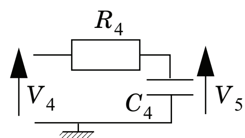

Figure 7

b) Représenter l'allure du diagramme de Bode en amplitude de ce filtre.

c) À quelle condition portant sur le produit $R_4C_4\omega$, le filtre passe-bas est-il efficace ? On suppose que cette condition est réalisée par la suite.

d) Exprimer la tension V_5 de sortie en fonction K, V_{10}, V_{2C}, V_{2s} et φ.

V.E.4) Quelle valeur faut-il donner au déphasage φ pour que la tension de sortie V_5 soit proportionnelle à V_{2C} ? Comment faut-il choisir C_2 dans ce cas ?

V.E.5) Quelle valeur faut-il donner au déphasage φ pour que la tension de sortie V_5 soit proportionnelle à V_{2s} ? Déterminer la valeur à donner à C_2 en fonction de R_2 et de la pulsation ω dans ce cas.

V.E.6) Compte tenu des valeurs numériques des différentes fréquences caractéristiques du mouvement de l'électron, peut-on utiliser les circuits électroniques proposés dans cette partie ?

••• FIN •••