Mathématique 2

TSI **2011**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations et rappels

- Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On notera $L(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$ formé des automorphismes de E.
- À tout $f \in L(E)$, on associe sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ choisie dans E.
  On rappelle que l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de $L(E)$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel, noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
  De la même façon, $GL(E)$ s'identifie, moyennant l'isomorphisme précédent, à l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n qui sont inversibles.
  On rappelle également que $GL(E)$ (respectivement $GL_n(\mathbb{C})$), muni de la composition des applications (respectivement muni du produit des matrices), possède une structure de groupe.
- Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$. On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures.
  Soit $f \in L(E)$. On sera amené à utiliser la propriété (T) suivante :
  $$\text{(T) : il existe une base } \mathcal{B}' \text{ de } E \text{ telle que } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$$
- On rappelle que, par convention : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^0 = I$ (matrice identité).
- Soit $f \in L(E)$. Alors, f admet n valeurs propres en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.
- On rappelle enfin que l'exponentielle d'un nombre complexe z peut être noté e^z ou $\exp z$ et que, pour tout nombre complexe z, $\exp z \neq 0$.

I Préliminaires : endomorphismes nilpotents, trace d'un endomorphisme

I.A – Soit $f \in L(E)$.

I.A.1) Montrer que f est injectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

I.A.2) Montrer que $f \in GL(E)$ si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

I.A.3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de M.

I.B – Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera dite nilpotente s'il existe un entier strictement positif k tel que : $N^k = 0$ (matrice nulle).

On note $k(N)$ le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété et on l'appelle « indice de nilpotence de N ».

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.B.1) Soit N la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $N \in \mathcal{N}_3(\mathbb{C})$ puis déterminer $k(N)$.

I.B.2) Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et M une matrice semblable à N.

a) Montrer que, pour tout entier naturel p, M^p et N^p sont semblables.

b) En déduire que, si N est nilpotente, M l'est aussi et $k(M) = k(N)$.

I.B.3) Soit $f \in L(E)$. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est également nilpotente et de même indice de nilpotence que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On dira alors que f est nilpotent et on notera $k(f)$ l'indice de nilpotence de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ qui sera appelé aussi indice de nilpotence de f.

I.B.4) Soient $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et n_{ij} son terme général.

On suppose que : $\forall i \in [\![1, n]\!], n_{ii} = 0$.

On note $n_{ij}^{(k)}$ le terme général de la matrice N^k avec $k \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et que $n_{ij}^{(2)} = 0$ si $j \leqslant i + 1$.

b) Montrer, plus généralement, que $N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et que $n_{ij}^{(k)} = 0$ si $j \leqslant i + k - 1$.

c) En déduire que $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

I.B.5) Soient $f \in L(E)$ et $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ la matrice de f dans une base appropriée $\mathcal{B}$ de E donnée par la propriété (T) rappelée en préliminaire.

a) En explicitant le polynôme caractéristique de N, déterminer les valeurs propres de f en fonction des termes diagonaux de N.

b) Montrer que f est nilpotent si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

I.B.6) Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si tous ses termes diagonaux sont nuls.

I.C – Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que la trace de A est le nombre complexe $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

I.C.1) Soit $f \in L(E)$.

Montrer que le nombre complexe $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ dans E.

On appelle « trace de l'endomorphisme f » ce nombre complexe, noté $\mathrm{Tr}(f)$.

Ainsi on a, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

I.C.2) Soit $f \in L(E)$. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, les valeurs propres (éventuellement égales) de f.

Montrer, à l'aide de la **question I.B.5 a**, que :

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

I.C.3) On considère le cas $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Montrer que A est soit diagonalisable, soit nilpotente.

I.C.4) A-t-on le même résultat lorsque $n = 3$?

II Exponentielle d'un endomorphisme

Soit $f \in L(E)$.

II.A – On suppose, tout d'abord, f diagonalisable, et on note $\mathcal{B}_p = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On définit alors l'endomorphisme $\exp f$ par l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}_p$ en posant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (\exp f)(e_i) = (\exp \lambda_i) e_i$$

II.A.1)

a) Représenter la matrice de $\exp f$ sur la base $\mathcal{B}_p$.

b) Montrer que $\exp f$ appartient à $GL(E)$.

Cet endomorphisme est appelé « exponentielle de l'endomorphisme f ». On admet qu'il ne dépend que de f et pas de la base de vecteurs propres de f utilisée pour le définir.

Si D est une matrice diagonale de termes diagonaux $\mu_1, \ldots, \mu_n$, on note $\exp D$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\exp \mu_1, \ldots, \exp \mu_n$.

II.A.2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M est diagonalisable.

Soient P_1, P_2 deux matrices inversibles et D_1, D_2 deux matrices diagonales telles que :

$$M = P_1 D_1 P_1^{-1} = P_2 D_2 P_2^{-1}$$

Montrer que $P_1 (\exp D_1) P_1^{-1} = P_2 (\exp D_2) P_2^{-1}$.

On appellera exponentielle de la matrice M, la matrice notée $\exp M$ égale à $P(\exp D)P^{-1}$ où (P, D) est un couple de matrices utilisé pour diagonaliser M.

II.B – On suppose maintenant que f est nilpotent, d'indice de nilpotence $k(f)$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, selon la propriété (T).

On pose alors :

$$\begin{cases} \exp f = \displaystyle\sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{f^p}{p!} & \text{où } f^0\text{=identité de E} \\ \exp M = \displaystyle\sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{M^p}{p!} & \end{cases}$$

II.B.1) Déterminer les termes diagonaux de la matrice $\exp M$.

II.B.2) En déduire l'ensemble des valeurs propres de $\exp f$ puis montrer que $\exp f \in GL(E)$.

L'endomorphisme $\exp f$ est encore appelé l'exponentielle de f et la matrice $\exp M$ l'exponentielle de M.

II.C – On suppose enfin que f satisfait à la propriété (P) suivante :

$$(\mathrm{P}) : \exists (d,g) \in \big(L(E)\big)^2,\ d \text{ diagonalisable, } g \text{ nilpotent, } d \circ g = g \circ d \,/\, f = d + g$$

On admettra que, si f satisfait à (P), alors le couple (d, g) donné par (P) est unique.

II.C.1)

a) Montrer que : $\exp d \circ \exp g = \exp g \circ \exp d$.

On pose alors : $\exp f = \exp d \circ \exp g$ et on l'appelle encore l'exponentielle de f.

On désigne par $\Gamma_n(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$ formé des endomorphismes f satisfaisant à (P).

De même, on désigne par $\Gamma_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices M qui peuvent s'écrire $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.

b) Montrer que, pour toute matrice M de $\Gamma_n(\mathbb{C})$, le couple (D, N) associé est unique.

On pose $\exp M = \exp D \exp N$ et on l'appelle l'exponentielle de M.

II.C.2) Soient $M \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$.

Démontrer que $PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et que $\exp(PMP^{-1}) = P(\exp M)P^{-1}$.

On a ainsi défini deux applications $\exp : \Gamma_n(E) \longrightarrow GL(E)$ et $\exp : \Gamma_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Notre but est maintenant d'étudier un peu plus précisément ces applications dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

III Le cas $n = 2$

On suppose dans toute cette partie que E désigne un $\mathbb{C}$ espace-vectoriel de dimension 2.

III.A – Soient $f \in L(E)$, λ et μ ses valeurs propres, E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. On suppose f non diagonalisable.

III.A.1) Montrer que $\lambda = \mu$ et que $\dim E_\lambda = 1$.

Montrer, de plus, que $(f - \lambda Id_E)^2 = 0$. (On pourra utiliser la **question I.B.5 a**).

III.A.2) Soient $v \in E$ un vecteur n'appartenant pas à E_λ et $u = f(v) - \lambda v$.

Montrer que $u \in E_\lambda \backslash \{0\}$ et que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de E. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

III.B – Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on définit les matrices suivantes :

$$D(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

On définit enfin le sous-ensemble suivant de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$J_2(\mathbb{C}) = \left\{ D(a,b)\,,\ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\} \cup \{ M(a)\,,\ a \in \mathbb{C} \}$$

Montrer que tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$.

III.C – Montrer que $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$ puis calculer $\exp D(a,b)$ et $\exp M(a)$ pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

III.D – Montrer que $\Gamma_2(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On admettra de même que $\Gamma_2(E) = L(E)$.

L'application exponentielle est ainsi une application de $L(E)$ dans $GL(E)$.

III.E –

III.E.1) Soient θ un réel non nul et $A(\theta)$ la matrice définie par :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\exp A(\theta)$.

III.E.2) L'application $\exp : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est-elle injective ?

III.E.3) En utilisant la **question III.C**, montrer que toute matrice de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est semblable à l'image par l'application exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$.

III.E.4) En déduire, en utilisant les questions **II.C.2**, **III.B** et **III.E.3**, que l'application $\exp : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est surjective.

III.F – Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,,\ \det\big(\exp M\big) = \exp\big(\mathrm{Tr}(M)\big)$.

III.G – Soient $SL_2(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$ et $L_0(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formé des matrices de trace nulle.

III.G.1) Montrer que $SL_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ et que :

$$\forall M \in L_0(\mathbb{C})\,,\, \exp M \in SL_2(\mathbb{C})$$

On considère maintenant la restriction $\widetilde{\exp} : L_0(\mathbb{C}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$.

III.G.2) Montrer, à l'aide de **I.C.3** et **III.B**, que tout élément de $L_0(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de la forme :

$$D(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{C} \qquad \text{ou} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III.G.3) Soit N' la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$N' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $N' \in SL_2(\mathbb{C})$ et que N' n'appartient pas à l'image de l'application $\widetilde{\exp}$.

En déduire que $\widetilde{\exp}$ n'est ni injective, ni surjective.

IV Le cas $n = 3$

Dans toute cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3.

L'objectif est ici de montrer que l'on a encore, dans ce cas, les égalités : $L(E) = \Gamma_3(E)$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{C}) = \Gamma_3(\mathbb{C})$.

Soient $f \in L(E)$, λ, μ et ν ses valeurs propres.

IV.A – On suppose que λ, μ et ν sont trois valeurs propres distinctes.

Montrer que $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.B – On suppose que $\lambda = \mu = \nu$.

IV.B.1) Montrer que $f - \lambda Id_E$ est nilpotent.

IV.B.2) Montrer que $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.C – On suppose que $\lambda = \mu$, $\mu \neq \nu$.

IV.C.1) Justifier l'existence de trois complexes a, b, c et d'une base (e_1, e_2, e_3) de E tels qu'on ait :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \lambda e_1 \\ f(e_2) &= a e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) &= b e_1 + c e_2 + \nu e_3 \end{aligned}$$

IV.C.2) Étant donnés deux complexes α et β, on pose $e'_3 = e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$.

Montrer que (e_1, e_2, e'_3) est une base de E.

IV.C.3) Montrer qu'on peut choisir α et β de sorte que $f(e'_3) = \nu e'_3$.

IV.C.4) Représenter la matrice M de f sur la base (e_1, e_2, e'_3) ainsi obtenue.

IV.C.5) Montrer que $M \in \Gamma_3(\mathbb{C})$ et $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.D – Montrer que $\Gamma_3(E) = L(E)$.

On admettra de même que $\Gamma_3(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. L'application exponentielle est ainsi une application de $L(E)$ dans $GL(E)$.

IV.E – Soient θ un réel non nul et $R(\theta) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV.E.1) Calculer $\exp R(\theta)$.

IV.E.2) En déduire que l'application $\exp : L(E) \longrightarrow GL(E)$ n'est pas injective.

N.B : On pourrait montrer, par un procédé analogue à celui utilisé dans le cas $n = 2$, que $\exp : L(E) \longrightarrow GL(E)$ est encore surjective dans le cas $n = 3$.

• • • FIN • • •