Mathématiques 2

PSI

2012

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Si n est un entier positif, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, noté $\langle X,Y\rangle$ pour $X,Y\in\mathbb{R}^n$. On note $\|X\|=\sqrt{\langle X,X\rangle}$ la norme associée.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On assimile $\mathbb{R}^n$ à l'espace des vecteurs colonnes d'ordre n et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à son algèbre d'endomorphismes. Ainsi $\langle X,Y\rangle={}^tXY$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$. On rappelle que $\mathrm{Tr}(A)$ est égale à la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X)=\det(A-XI_n)$.

Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $R(A)=\left\{{}^tXAX \;\middle|\; X\in\mathbb{R}^n, \|X\|=1\right\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

Les parties ainsi que les questions ne sont pas indépendantes.

I Généralités

Soit $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A – Démontrer que les valeurs propres réelles de A sont dans $R(A)$.

I.B – **I.B.1)** Démontrer que les éléments a_{ii} $(1\leqslant i\leqslant n)$ de la diagonale de A sont dans $R(A)$.

I.B.2) En considérant la matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

montrer que les éléments a_{ij} avec $i\neq j$ ne sont pas nécessairement dans $R(A)$.

I.C – On considère deux nombres réels $a\in R(A)$ et $b\in R(A)$, avec $a<b$. Soient X_1 et X_2 deux vecteurs de norme 1 tels que ${}^tX_1AX_1=a$, ${}^tX_2AX_2=b$.

I.C.1) Démontrer que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants.

I.C.2) On pose $X_\lambda=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$ pour $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

Démontrer que la fonction $\phi\,:\,\lambda\mapsto\dfrac{{}^tX_\lambda AX_\lambda}{\|X_\lambda\|^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$.

I.C.3) En déduire que le segment $[a,b]$ est inclus dans $R(A)$.

I.D – Démontrer que si $\mathrm{Tr}(A)=0$ alors $0\in R(A)$.

I.E – Soit Q une matrice orthogonale réelle. Démontrer que $R(A)=R({}^tQAQ)$.

I.F – On considère les conditions suivantes :

(C1) $\mathrm{Tr}(A)\in R(A)$

(C2) Il existe une matrice orthogonale réelle Q telle que la diagonale de la matrice ${}^tQAQ$ soit de la forme $(\mathrm{Tr}(A),0,\dots,0)$

I.F.1) Démontrer que la condition (C2) implique la condition (C1).

I.F.2) On suppose que $x\in R(A)$.

Démontrer qu'il existe une matrice Q_1 orthogonale telle que

$${}^tQ_1AQ_1=\begin{pmatrix}x&L\\C&B\end{pmatrix}$$

où B est une matrice de format $(n-1,n-1)$ $(B\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}))$, C un vecteur colonne à $n-1$ éléments $(C\in\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}))$ et L un vecteur ligne à $n-1$ éléments $(L\in\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}))$.

I.F.3) Démontrer que si la matrice A est symétrique il en est de même pour la matrice B ci-dessus.

I.F.4) Démontrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tQ_1AQ_1)$.

I.F.5) En déduire que si A est symétrique, la condition (C1) implique la condition (C2)

On pourra raisonner par récurrence sur n.

II Matrices symétriques de format $(2, 2)$

Dans toute cette partie A et B désignent des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \leqslant \mu_2$) les valeurs propres de A (resp. B).

De plus on dira qu'une matrice symétrique S est positive, ce que l'on notera $S \geqslant 0$, si et seulement si toutes ses valeurs propres sont $\geqslant 0$.

II.A – Démontrer que $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$.

II.B – On considère l'ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ défini par l'équation $\langle AX, X\rangle = 1$.

II.B.1) Caractériser les conditions sur les λ_i pour lesquelles cet ensemble est :

a) vide ;

b) la réunion de deux droites ;

c) une ellipse ;

d) une hyperbole.

II.B.2) Réprésenter sur une même figure les ensembles Γ obtenus pour A diagonale avec $\lambda_1 \in \{-4, -1, 0, 1/4, 1\}$ et $\lambda_2 = 1$.

II.C – Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) \leqslant \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$.

On pourra utiliser une matrice P orthogonale telle que ${}^tPBP$ soit une matrice diagonale, pour obtenir ${}^tPAP = A' = (a'_{ij})$ avec $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a'_{11} + a'_{22}$.

II.D – On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

et on suppose $A \geqslant 0$.

II.D.1) Démontrer que $\det(A) \geqslant 0$.

II.D.2) Démontrer que ${}^tXAX \geqslant 0$ pour tout vecteur X.

II.D.3) Démontrer que $a \geqslant 0$ et $d \geqslant 0$.

II.D.4) Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que :

$$S \geqslant 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad (\mathrm{Tr}(S) \geqslant 0 \text{ et } \det(S) \geqslant 0)$$

II.E – On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

On suppose dans cette section que $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$.

II.E.1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(b_1, \sqrt{\det A})$ et $(b_2, \sqrt{\det B})$, démontrer que

$$b_1b_2 \leqslant \sqrt{a_1a_2d_1d_2} - \sqrt{\det A \det B}$$

II.E.2) En calculant $\det(A + B) - \det A - \det B$, en déduire que

$$\det(A + B) \geqslant \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)}$$

II.F – On suppose dans cette sous-partie $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, $\det A \det B \neq 0$ et $b_1b_2 \neq 0$.

II.F.1) Démontrer que l'on a l'égalité dans la formule de la **question II.E.2** si et seulement si les vecteurs (a_1, d_1) et (a_2, d_2) sont liés, ainsi que les vecteurs $(b_1, \sqrt{\det A})$ et $(b_2, \sqrt{\det B})$.

II.F.2) Démontrer alors que l'on a l'égalité dans la formule de la **question II.E.2** si et seulement si les matrices A et B sont proportionnelles ($A = \lambda B$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$).

II.G – On considère la relation suivante sur l'ensemble des matrices symétriques réelles de format (2,2) : on dit que $S \leqslant S'$ si et seulement si la matrice symétrique $S' - S$ vérifie $S' - S \geqslant 0$.

Démontrer que la relation $\leqslant$ ci-dessus est bien une relation d'ordre sur les matrices symétriques réelles de format (2,2).

II.H – On considère une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$$

de matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée pour la relation d'ordre définie à la question précédente.

II.H.1) Démontrer que pour tout vecteur X, la suite $({}^tXA_nX)_{n\geqslant 0}$ est croissante majorée.

II.H.2) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ sont croissantes majorées.

II.H.3) En considérant le vecteur $X = (1,1)$, démontrer que la suite de matrices $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$.

III Matrices symétriques définies positives

Dans cette partie toutes les matrices sont de format (n,n), où n est un entier supérieur ou égal à 2. On dit qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

III.A – Soit A une matrice symétrique définie positive.

Démontrer qu'il existe une matrice inversible Y telle que $A = {}^tYY$.

III.B – Soient A une matrice symétrique définie positive et B une matrice symétrique.

Démontrer qu'il existe une matrice inversible T telle que :

$${}^tTAT = I_n \qquad \text{et} \qquad {}^tTBT = D$$

où I_n désigne la matrice identité et D une matrice diagonale.

III.C – Soient A et B deux matrices symétriques définies positives.

III.C.1) Démontrer que : $\det(I_n + B) \geqslant 1 + \det B$.

III.C.2) En déduire que : $\det(A + B) \geqslant \det A + \det B$.

III.D – Soient x un nombre réel strictement positif, β un nombre réel tel que $0 < \beta < 1$.

Démontrer que : $x^\beta \leqslant \beta x + 1 - \beta$.

III.E – Soient A et B deux matrices symétriques définies positives, α et β deux nombres réels > 0 tels que $\alpha + \beta = 1$; démontrer que :

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

III.F – Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, soient A_i des matrices symétriques définies positives et α_i des nombres strictement positifs tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Démontrer que

$$\det(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k) \geqslant (\det A_1)^{\alpha_1} \ldots (\det A_k)^{\alpha_k}$$

On pourra raisonner par récurrence sur k.

• • • FIN • • •