Mathématiques 1

TSI **2014**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

I Polynômes et nombres de Bernoulli

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H défini par

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X];\ \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x = 0 \right\}$$

Dans tout le problème, on confond les polynômes et les fonctions polynômes.

On note D l'application linéaire de H dans $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P \in H$ associe son polynôme dérivé P'

$$\forall P \in H, \quad D(P) = P'$$

On identifiera polynôme constant et nombre réel.

I.A –

I.A.1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

À l'aide de l'égalité $P = \left(P - \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x\right) + \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x$, montrer qu'il existe un unique couple $(Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda$.

I.A.2) En déduire que D est surjectif.

I.A.3) Montrer que D est un isomorphisme.

On note $\varphi = D^{-1}$, l'isomorphisme réciproque. Ainsi, si $A \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme B tel que $B = \varphi(A)$ est l'unique polynôme dans H tel que $B' = A$.

I.A.4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note Q la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)P(t)\ \mathrm{d}t$$

On pourra considérer une primitive de P.

a) Montrer que $Q \in H$.

b) Vérifier que $Q = \varphi(P)$.

I.B – On considère la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \varphi(B_n)$$

Le polynôme nB_n est le n-ième *polynôme de Bernoulli*.

I.B.1) Calculer B_1 et B_2.

I.B.2) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

I.C – Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme C_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

I.C.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer C'_{n+1} à l'aide de C_n.

I.C.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

I.C.3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

I.C.4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les nombres $B_{2n+1}(0)$ et $B_{2n+1}(1)$ sont nuls.

I.D – Écrire une procédure `Bern` qui prend en argument un nombre entier n et un nombre réel x et qui affiche la valeur de l'expression $B_n(x)$. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel usuellement utilisé.

II Développement de Fourier

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$. Le nombre nb_n est le n-ième *nombre de Bernoulli*.
Pour tout polynôme P, on désigne par $\overline{P}$ la fonction périodique de période 1 définie par

$$\forall x \in]0,1[, \quad \overline{P}(x) = P(x) \quad \text{et} \quad \overline{P}(0) = \frac{P(0)+P(1)}{2}$$

II.A –

II.A.1) Tracer le graphe de $\overline{B_2}$ sur l'intervalle $[-1,2]$.

II.A.2) La fonction $\overline{B_2}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? De classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

II.A.3) La fonction $\overline{B_1}$ est-elle continue ?

II.B – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

II.B.1) Prouver que la fonction $\overline{P}$ est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. À quelle condition est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

II.B.2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{P}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos(2k\pi x) + \beta_k \sin(2k\pi x)\right)$$

où les nombres α_0, α_1,... et β_1, β_2,... sont les coefficients de Fourier de $x \mapsto \overline{P}(x)$, dont on donnera les expressions sous forme d'intégrales.

II.C – À l'aide de la partie I, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \overline{B_{2n}}(x)$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

II.D – Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_k(n) = \int_0^1 B_{2n}(x) \cos(2k\pi x)\ \mathrm{d}x$$

II.D.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_0(n)$.

II.D.2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre $I_k(n+1)$ et $I_k(n)$.

II.D.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_k(1)$.

II.D.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$B_{2n}(x) = 2(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2n}} \cos(2k\pi x)$$

II.D.5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$. Justifier l'existence de ce nombre et montrer que

$$S_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} (2\pi)^{2n} b_{2n}$$

II.D.6) Déterminer la valeur de $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

III La formule d'Euler - Mac Laurin

Le nombre n est un entier naturel non nul et f une fonction de classe C^{2n} sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour tout entier k compris entre 1 et $2n$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction f.

III.A – On pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(x) f^{(2n)}(x)\ \mathrm{d}x$.

Pour $n \geqslant 2$, démontrer la relation

$$J_n = b_{2n}\left(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)\right) + J_{n-1}$$

III.B – Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - b_2\left(f'(1) - f'(0)\right) + J_1$$

III.C – En déduire que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + J_n$$

III.D – Soit g une fonction de classe C^{2n} sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.
En considérant la fonction $x \mapsto g\left((1-x)a+bx\right)$ définie sur $[0,1]$, montrer que l'on obtient la formule d'Euler - Mac Laurin :

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(g(b)+g(a)) - \sum_{k=1}^{n}(b-a)^{2k} b_{2k}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right) + R_n$$

où $R_n = \displaystyle\int_0^1 (b-a)^{2n+1} B_{2n}(x) g^{(2n)}((1-x)a+bx)\ \mathrm{d}x$.

IV La formule de Stirling pour la fonction Γ

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

IV.A – Justifier que l'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

IV.B –

IV.B.1) Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

IV.B.2) En déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

IV.C – Montrer que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
On admet qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.D – Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \ln\left(\Gamma(x)\right)$$

IV.D.1) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction g est de classe C^{2n} sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.D.2) Pour tout réel $x>0$, calculer $g(x+1)-g(x)$.

IV.D.3) Démontrer qu'il existe une constante K tel que

$$\forall\, x>0, \quad \int_x^{x+1} g(t)\ \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + K$$

IV.D.4) Soit p un entier strictement positif.
Montrer que, pour tout $x>0$, on a

$$\frac{\ln\left(\Gamma(x+1)\right)+\ln\left(\Gamma(x)\right)}{2} = x\ln(x) - x + K + \sum_{k=1}^{p}\frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}}b_{2k} - R_p(x)$$

où $R_p(x) = \displaystyle\int_0^1 B_{2p}(t) g^{(2p)}(t+x)\ \mathrm{d}t$.

La relation précédente permet d'établir la formule de Stirling pour la fonction Γ

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

après avoir prouvé que

$$\lim_{x\to+\infty} R_p(x) = 0$$

• • • FIN • • •