

Conception de la commande d'un robot chirurgical

Contexte de l'application

Afin d'améliorer les conditions d'opérations chirurgicales dites mini invasives (comme la précision d'opération et le confort du chirurgien), des robots chirurgicaux ont vu le jour. Cette étude s'intéresse à l'un d'entre eux : le robot Da Vinci. Le chirurgien peut atteindre sa cible grâce à des outils longs et fins traversant le patient grâce à une incision de l'ordre du centimètre.

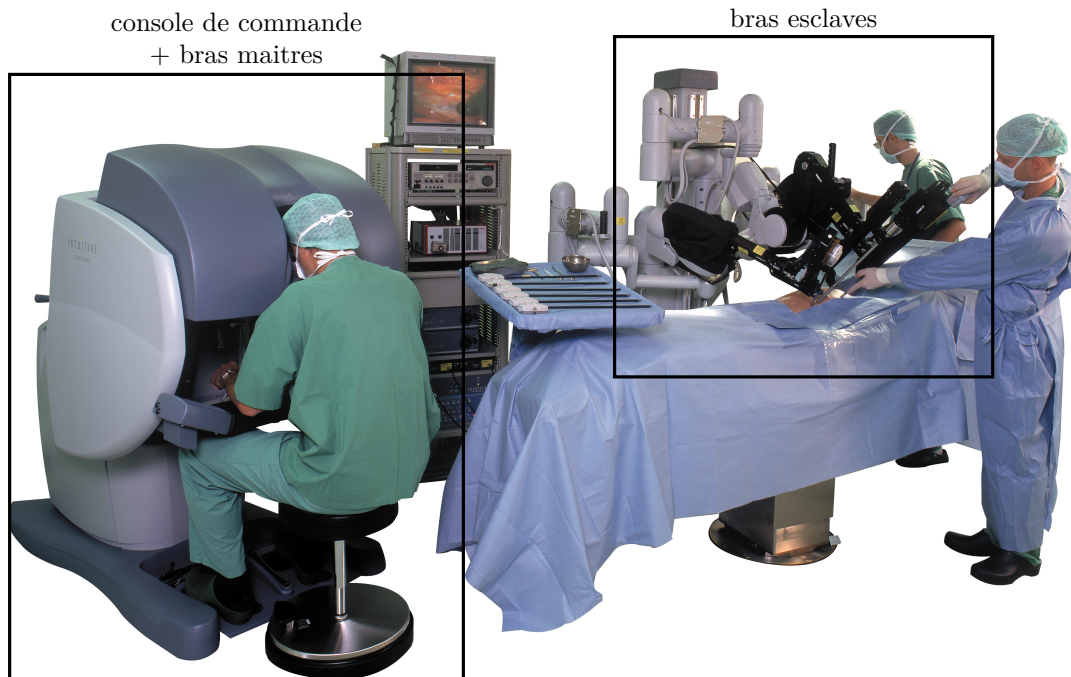


Figure 1 Robot Da Vinci lors de la phase de vie « en opération »

Le système étudié est composé de deux sous-systèmes principaux (voir [figure 1](#)) :

- l'ensemble {console de commande + bras maîtres} permet au chirurgien de visualiser et de commander les mouvements des outils adéquats à l'intérieur du patient via une caméra haute définition dont l'image est retransmise par l'intermédiaire d'écrans. Le chirurgien commande les mouvements des outils grâce à deux bras maîtres dont les extrémités sont maintenues dans chaque main ;
- les bras esclaves reçoivent les consignes issues du chirurgien par l'intermédiaire des bras maîtres. Il y a au total 3 bras esclaves : deux manipulent chacun un outil, le troisième manipule une caméra.

La [figure 2](#) montre les interactions induites par le système.

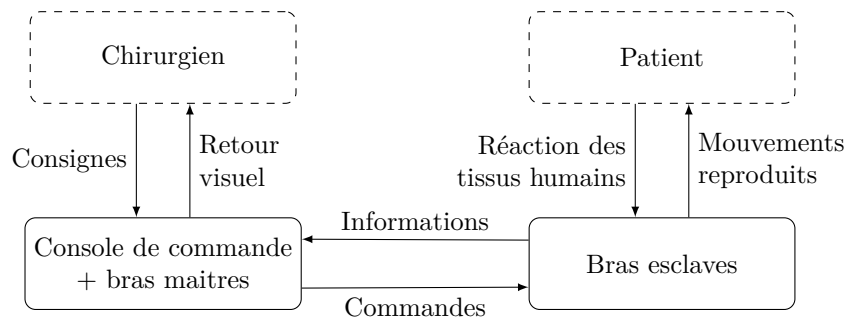


Figure 2 Interactions induites par le système

Cette structure assure une excellente répétabilité des mouvements retranscrits par le robot et les reproduit avec une grande précision. Cette performance de précision dépend de plusieurs facteurs dont deux principaux :

- les erreurs dues à la mauvaise retranscription de la consigne du chirurgien (incertitudes liées à la mesure des positions articulaires du bras maître) ;
- les erreurs dues à l'asservissement en position de l'outil.

La **figure 3** représente le modèle multi-physique du robot chirurgical.

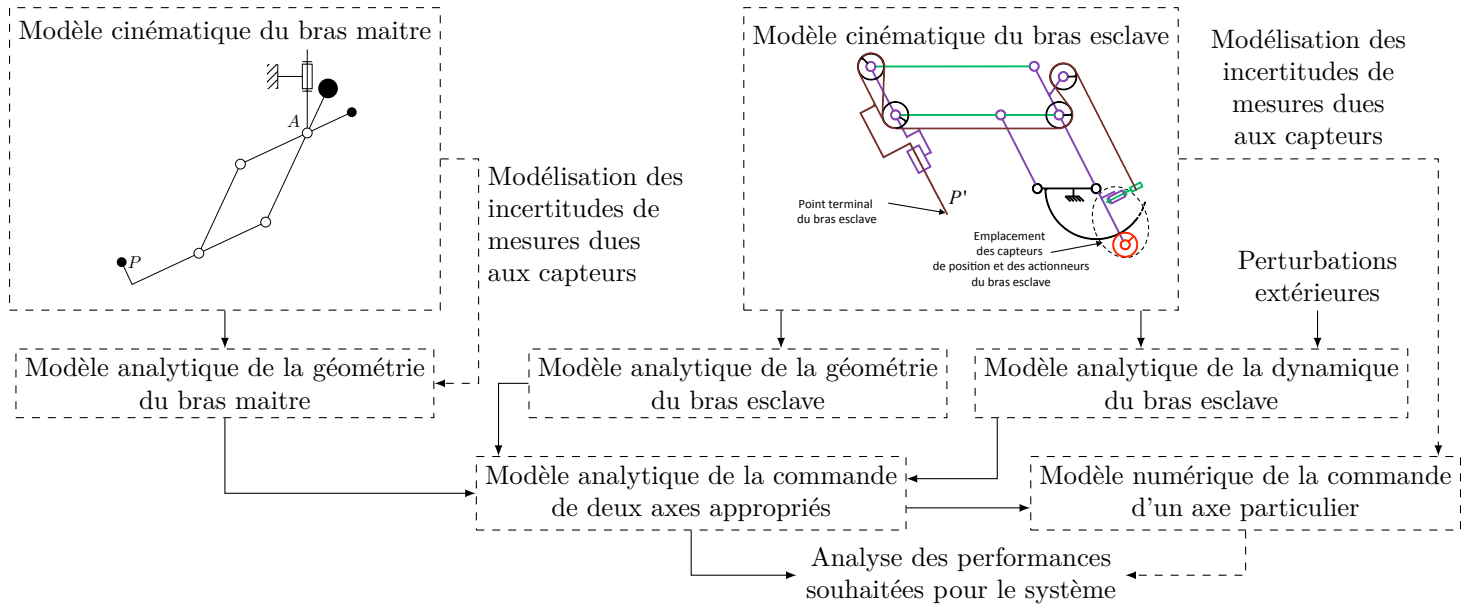


Figure 3 Modèle multi-physique du robot chirurgical

L'objectif de cette étude est de concevoir partiellement la loi de commande du robot chirurgical en vue de satisfaire les critères du cahier des charges fourni dans le document réponse sous la forme d'un diagramme des exigences (figure A du document réponse). Ce sujet est organisé en trois parties :

- la première s'intéresse à établir un modèle géométrique d'un bras maître en vue de quantifier l'impact des incertitudes de la chaîne de mesure de la position angulaire des articulations du bras maître permettant de retranscrire la consigne du chirurgien au robot (bras esclave) ;
- la deuxième exploite un modèle simplifié d'un bras esclave pour la conception de l'asservissement de position du robot ;
- la troisième analyse la conséquence des bruits de mesure, compte tenu des correcteurs élaborés à la deuxième partie, sur la sollicitation en couple du moteur. Cette analyse conduit à l'amélioration de la loi de commande afin de limiter la sensibilité du système aux bruits de mesure.

Pour manipuler le robot, le chirurgien utilise le bras maître en contrôlant la position du point d'accroche, noté P (cf. figures 4 et 5). Le bras esclave est asservi en position sur les consignes envoyées par le bras maître. Le point terminal du bras esclave, noté P' , représente l'outil chirurgical (hors étude). La stratégie de commande mise en place doit assurer un déplacement du point P' idéalement identique au déplacement du point P .

La **figure 4** montre à gauche le schéma cinématique simplifié d'un des deux bras maîtres (les deux bras ont des structures strictement identiques).

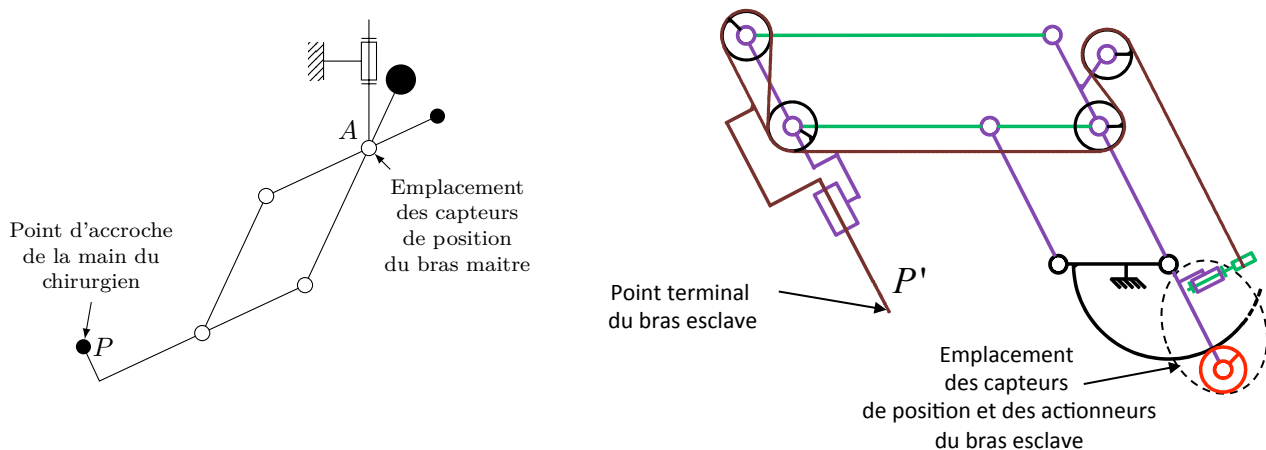


Figure 4 Schéma cinématique simplifié du bras maître et du bras esclave

Le bras esclave possède une structure très différente du bras maître pour des raisons d'accessibilité au corps du patient. La figure 4 à droite montre le schéma cinématique simplifié du bras esclave. Cette structure est fondée sur l'utilisation de deux parallélogrammes déformables. Ainsi, le bras possède trois degrés de liberté pour permettre à l'outil de balayer un certain volume dans le corps du patient. Les trois actionneurs (machines à courant continu) du bras esclave permettent de mouvoir l'outil. Les trois axes sont asservis (sans compter les axes dédiés à l'outil lui-même, au nombre de quatre, ces axes sont hors étude).

Les déplacements des points P et P' , situés aux extrémités des bras maîtres et esclaves respectivement, sont appelés *variables opérationnelles*. Elles sont paramétrables suivant le système de coordonnées cartésiennes. La mesure de ces déplacements n'est pas directe car les capteurs de position ne sont pas situés sur les extrémités des bras, mais en amont (voir figure 4) sur certaines articulations de chacun des bras. Les grandeurs mesurées sont donc des angles : elles sont appelées *variables articulaires*.

Pour le bras maître, les capteurs mesurent les variables articulaires des liaisons pivots au point A (angles $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, voir figure 5). Pour le bras esclave, les capteurs mesurent les angles des actionneurs. Le schéma bloc fonctionnel d'asservissement simplifié du déplacement du point terminal du bras esclave sur le point d'accroche de la main du chirurgien est donné partiellement dans le document réponse.

Q 1. D'après le descriptif du système, compléter le tableau du document réponse en associant les numéros des blocs correspondants aux éléments proposés.

I Étude du bras maître

Objectif

Évaluer l'impact des incertitudes de la chaîne de mesure des positions articulaires du bras maître sur le calcul de la consigne transmise au robot (bras esclave) au moyen d'un modèle géométrique du bras maître.

La figure 5 montre un des deux bras maîtres ainsi que le schéma cinématique associé.

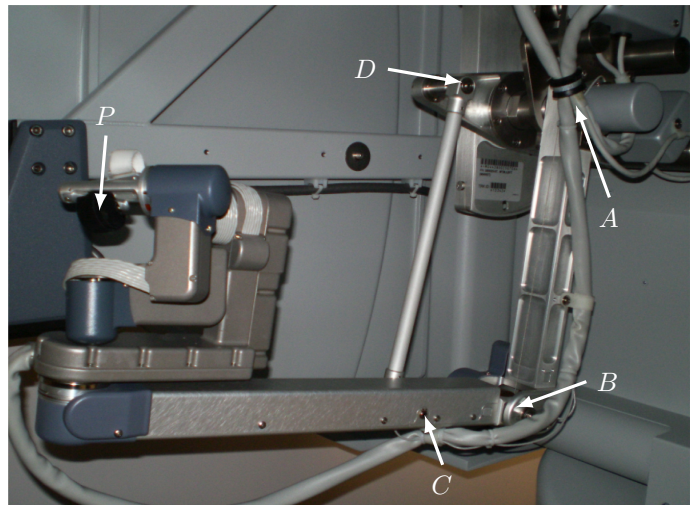
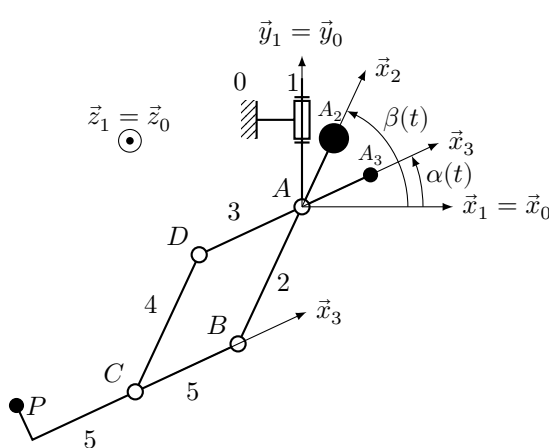


Figure 5 Schéma cinématique partiel modélisant le bras maître et photographie du bras maître

Description du bras maître

Le bras maître offre des mouvements dans l'espace selon 7 axes :

- 3 translations du point P par rapport au repère $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ obtenues via le système modélisé figure 5 ;
- 3 rotations (non étudiées) réalisées via un mécanisme permettant d'orienter l'extrémité de l'outil chirurgical dans l'espace (non modélisé sur le schéma cinématique de la figure 5) ;
- 1 mouvement de serrage (non étudié) des outils munis d'une pince permettant de saisir les tissus humains (non modélisé sur le schéma cinématique de la figure 5).

Dans cette étude, le point P représente le point d'accroche de la main du chirurgien sur le bras maître. Les 3 translations imposées par le chirurgien sont obtenues via une combinaison de mouvements de rotation autour de différents axes :

- une rotation d'axe $(A, \vec{y}_1)$ (rotation de 1/0) ;
- deux rotations d'axe $(A, \vec{z}_1)$ (rotation de 2/1 et de 3/1).

Le constructeur a choisi d'utiliser une structure particulière pour les deux dernières rotations. Afin de soulager le chirurgien lors de l'opération, des contrepoids solidaires des éléments 2 et 3 assurent l'équilibre stable du bras maître lorsqu'il n'est soumis qu'à son propre poids outre les actions des liaisons.

Pour toute la suite du sujet, le mouvement de rotation verticale (entre 0 et 1) n'est pas étudié. Ainsi, on impose $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$, $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$ et $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. On adopte une modélisation plane dans le plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Paramétrage et hypothèses

Solide	Caractéristiques géométriques	Caractéristiques massiques	Situation géométrique/commentaires
2	$\overrightarrow{BA} = l_2 \vec{x}_2$ $l_2 = 500 \text{ mm}$ $\overrightarrow{BG_2} = \frac{l_2}{2} \vec{x}_2$	masse : $m_2 = 2,5 \text{ kg}$ centre de gravité : G_2	repère attaché : $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ paramètres d'orientation : $\beta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$
Contrepoids solidaire de 2	$\overrightarrow{AA_2} = e \vec{x}_2$ $e = 300 \text{ mm}$	masse : M_2 centre de gravité : A_2	
3	$\overrightarrow{DA} = l_3 \vec{x}_3$ $l_3 = 300 \text{ mm}$ $\overrightarrow{DG_3} = \frac{l_3}{2} \vec{x}_3$	masse : $m_3 = 3 \text{ kg}$ centre de gravité : G_3	repère attaché : $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ paramètres d'orientation : $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$
Contrepoids solidaire de 3	$\overrightarrow{AA_3} = e \vec{x}_3$	masse : M_3 centre de gravité : A_3	
4	$\overrightarrow{CD} = l_2 \vec{x}_2$ $\overrightarrow{CG_4} = \frac{l_2}{2} \vec{x}_2$	masse : $m_4 = 1,5 \text{ kg}$ centre de gravité : G_4	
5	$\overrightarrow{CB} = l_3 \vec{x}_3$ $\overrightarrow{BG_5} = -\frac{3l_3}{2} \vec{x}_3$ $\overrightarrow{BP} = -2l_3 \vec{x}_3 + h \vec{y}_3$ $h = 150 \text{ mm}$	masse : $m_5 = 2,5 \text{ kg}$ centre de gravité : G_5	ces caractéristiques prennent en compte le système d'orientation de l'outil non représenté

Le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = -g\vec{y}_0$ avec $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Les solides sont indéformables.

I.A – Justification de la structure

La manipulation du bras maître doit s'effectuer de manière à minimiser la fatigue du chirurgien. Pour cela, un des objectifs est donc de minimiser les efforts musculaires pour le manipuler. Au repos, la structure cinématique retenue pour le bras maître lui permet de rester dans une position d'équilibre stable quelle que soit sa position. Cette propriété intéressante est obtenue grâce à l'utilisation des deux contrepoids. Outre les actions des liaisons, seul le poids s'applique à l'ensemble des pièces du bras maître. Le centre de gravité de l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, \text{contrepoids solidaire de 2, contrepoids solidaire de 3}\}$ est noté G . Le critère de manipulation avec un minimum d'effort musculaire se traduit alors par la condition suivante : $\overrightarrow{AG} \cdot \vec{x}_0 = 0$.

Q 2. En s'appuyant sur la figure 5, montrer que la condition énoncée ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante

$$K_{M3} \cos \alpha(t) + K_{M2} \cos \beta(t) = 0$$

avec K_{M2} une constante à expliciter en fonction de M_2 , e , l_2 , m_2 , m_4 et m_5 ; K_{M3} une constante à expliciter en fonction de M_3 , e , l_3 , m_3 , m_4 et m_5 .

Q 3. Afin d'assurer l'équilibre pour toutes les valeurs de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, donner les expressions de M_2 et M_3 , puis les calculer numériquement.

Les masses M_2 et M_3 trouvées à la question précédente sont constantes et mettent en avant l'utilité de la structure. La suite s'attache à la modélisation du bras maître.

I.B – Modélisation géométrique du bras maître

Notations à respecter dans le sujet :

- la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est notée $F(p) = L[f(t)]$;
- un vecteur $\vec{u} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0$ sera noté $\vec{u} = (x \ y)^T$;
- la transformée de Laplace d'un vecteur $\vec{v}(t) = (f(t) \ g(t))^T$ est notée $\vec{V}(p) = L[\vec{v}(t)] = (F(p) \ G(p))^T$;
- soit $M(p)$ une matrice 2×2 telle que $\vec{V}(p) = M(p)\vec{W}(p)$ avec $\vec{V}(p) = (F(p) \ G(p))^T$, $\vec{W}(p) = (F'(p) \ G'(p))^T$, les relations suivantes $F(p) = M_{00}(p)F'(p) + M_{01}(p)G'(p)$ et $G(p) = M_{10}(p)F'(p) + M_{11}(p)G'(p)$ impliquent

$$M(p) = \begin{pmatrix} M_{00}(p) & M_{01}(p) \\ M_{10}(p) & M_{11}(p) \end{pmatrix}$$

- la représentation par schéma bloc d'une relation vectorielle dans le domaine de Laplace $\vec{V}(p) = M(p)\vec{W}(p)$ se traduit par

$$\vec{W}(p) \longrightarrow \boxed{M(p)} \longrightarrow \vec{V}(p)$$

Lors de l'opération, le chirurgien impose le déplacement du point P (voir figure 5). Ces déplacements sont de faibles amplitudes et varient autour d'un point P_0 . On note $\vec{AP}(t) = (x(t) \ y(t))^T$ le vecteur position du point P , exprimé dans la base fixe $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$; $x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées dites opérationnelles. $\vec{AP}_0 = (x_0 \ y_0)^T$ est le vecteur correspondant au point de référence P_0 , exprimé dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. La variation autour de P_0 est modélisée par $\vec{\Delta P}_c(t) = (\Delta x(t) \ \Delta y(t))^T$, exprimé dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. $\Delta x(t)$ et $\Delta y(t)$ sont des petites variations dépendant du temps telles que $x(t) = x_0 + \Delta x(t)$ et $y(t) = y_0 + \Delta y(t)$.

Ces variations entraînent une variation du vecteur des variables articulaires $\vec{a}_m(t) = (\alpha(t) \ \beta(t))^T$ autour d'une position de référence $\vec{a}_{m0} = (\alpha_0 \ \beta_0)^T$. Les variations des variables articulaires autour de leur position de référence sont notées $\vec{\Delta a}_m(t) = (\Delta \alpha(t) \ \Delta \beta(t))^T$ telles que $\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta \alpha(t)$ et $\beta(t) = \beta_0 + \Delta \beta(t)$. Les deux relations scalaires issues de la projection de l'équation $\vec{AP}(t) = \vec{AB}(t) + \vec{BP}(t)$ dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ sont :

$$\begin{aligned} x(t) &= -l_2 \cos \beta(t) - 2l_3 \cos \alpha(t) - h \sin \alpha(t) \\ y(t) &= -l_2 \sin \beta(t) - 2l_3 \sin \alpha(t) + h \cos \alpha(t) \end{aligned}$$

Q 4. En utilisant les deux équations fournies ci-dessus, montrer que la relation liant $\vec{\Delta P}_c(t)$ à $\vec{\Delta a}_m(t)$ peut se mettre sous la forme $\vec{\Delta P}_c(t) = Q_m \vec{\Delta a}_m(t)$ où Q_m est une matrice carrée 2×2 à expliciter en fonction de l_2 , l_3 , h , α_0 et β_0 .

Q 5. Justifier pourquoi Q_m doit être inversible.

Pour la suite du sujet, on considère Q_m inversible.

I.C – Analyse de l'impact des incertitudes de la chaîne de mesure

— Objectif —

Évaluer l'impact des incertitudes de la chaîne de mesure du bras maître sur l'élaboration de la consigne de position de l'asservissement du bras esclave.

Soit $M_m = Q_m^{-1}$ la matrice inverse de Q_m . Soit C_m la matrice formée par les gains des capteurs des angles $\Delta \alpha$ et $\Delta \beta$ telle que $\vec{\Delta a}_m^m(t) = C_m \vec{\Delta a}_m(t)$ avec $\vec{\Delta a}_m^m(t) = (\Delta \alpha^m \ \Delta \beta^m)^T$, $\vec{\Delta a}_m^m(t)$ étant le vecteur des mesures angulaires (en volts). En notant c_α et c_β les coefficients des deux capteurs angulaires, il vient :

$$C_m = \begin{pmatrix} c_\alpha & 0 \\ 0 & c_\beta \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{\Delta P}_c^i(t) = (\Delta x^i(t) \ \Delta y^i(t))^T$ le vecteur image de $\vec{\Delta P}_c(t)$ pris comme consigne de position pour l'asservissement de position du bras esclave. Soit N_m la matrice telle que $\vec{\Delta P}_c^i(t) = N_m \vec{\Delta a}_m^m(t)$. L'image de la consigne devant être égale à la consigne (déplacement du point P) imposée par le chirurgien, il faut respecter la condition :

$$\vec{\Delta P}_c(t) = \vec{\Delta P}_c^i(t)$$

Q 6. Exprimer N_m en fonction de C_m et Q_m respectant cette condition, puis compléter le schéma bloc du document réponse.

Les incertitudes de mesures impactent les consignes images de positions. Pour prendre en compte l'impact de ces incertitudes sur le vecteur de consigne $\vec{\Delta P}_c^i(t)$, un modèle particulier est considéré tel que chaque coefficient de la matrice C_m est susceptible de varier aléatoirement entre deux valeurs. Au vu du domaine d'application du robot, le fabricant des capteurs doit garantir que l'ensemble des valeurs de c_α appartiennent à l'intervalle $[1 - \Sigma, 1 + \Sigma]$. De la même manière, l'ensemble des valeurs de c_β appartiennent à l'intervalle $[1 - \Sigma, 1 + \Sigma]$ avec $\Sigma = 1 \times 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$. Il est important de noter que c_α varie indépendamment de c_β .

On se place dans le cas où le chirurgien déplace le point P tel que $\Delta x = 50 \text{ mm}$ et $\Delta y = 50 \text{ mm}$ à partir d'une position de référence correspondant à la position la plus confortable pour le chirurgien. Ces déplacements seront considérés comme les plus grands déplacements nécessaires lors d'une opération. On note $\vec{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} \Delta x^i - \Delta x \\ \Delta y^i - \Delta y \end{pmatrix}$ le vecteur des erreurs sur la consigne retranscrite.

Plusieurs centaines d'essais ont permis d'évaluer l'impact des incertitudes sur l'image de la consigne. Les résultats sont donnés dans le document réponse. Le contour de la surface définie par l'ensemble des points de coordonnées

$\vec{\varepsilon}_i$ issus de $(c_\alpha, c_\beta) \in [1-\Sigma, 1+\Sigma] \times [1-\Sigma, 1+\Sigma]$ y est également représenté. Ce contour correspond à l'enveloppe au pire des cas des erreurs sur la consigne retranscrite, c'est-à-dire en considérant que chaque coefficient c_α et c_β ne peut prendre que les valeurs extrêmes des intervalles précédemment mentionnés (indépendamment les uns des autres).

Q 7. À partir de la figure du document réponse, calculer la norme maximale notée $\varepsilon_{\max}$ de l'erreur $\vec{\varepsilon}_i$ en considérant le pire des cas, puis tracer les deux vecteurs possibles correspondant à $\varepsilon_{\max}$ sur la figure du document réponse. Conclure quant au respect de l'exigence 1.2.1.1 du cahier des charges (voir document réponse, diagramme des exigences).

II Étude du bras esclave

Objectif

Concevoir la chaîne d'asservissement du bras esclave. Pour cela, un modèle du bras esclave sera établi dans un premier temps. Ce modèle sera utilisé pour déterminer le correcteur de la chaîne d'asservissement dans un second temps.

Les consignes générées par le bras maître dont la structure a été étudiée à la section précédente sont, après traitement, utilisées pour le système d'asservissement lié aux bras esclaves. Les 3 bras esclaves, de même structure, permettent de mouvoir les outils chirurgicaux. Ces derniers passent à travers le patient grâce à de fines incisions. L'interface entre l'outil chirurgical et le patient au niveau de l'incision est assurée par un trocart qui est une pièce tubulaire servant d'interface entre le corps du patient et l'outil. La figure 6 propose un schéma cinématique spatial d'un bras esclave. La figure 7 schématise partiellement le bras esclave et une coupe transversale du patient. L'extrémité de l'outil chirurgical n'est pas représentée. Le point P' représente un point de référence au niveau de l'extrémité de l'outil et le point T est le centre de l'incision où l'outil rentre dans le corps du patient via un trocart. Les actionneurs et les systèmes d'entraînement utiles à la mise en mouvement ne sont pas représentés pour plus de lisibilité. La structure détaillée sera exposée plus loin dans le sujet. Le point T appartient à l'axe $(A', \vec{x}_0)$ de la liaison entre 1' et 0. Le solide 7' représente le corps d'outil.

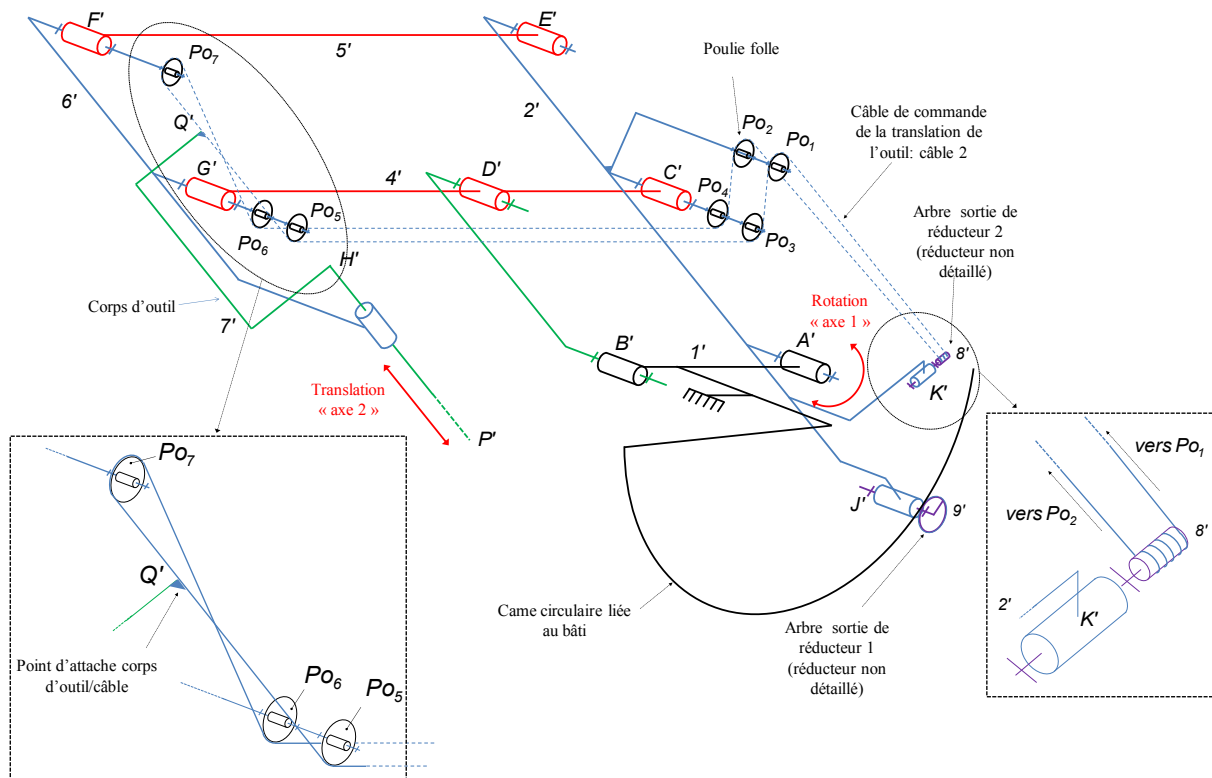


Figure 6 Schéma cinématique spatial partiel du bras esclave

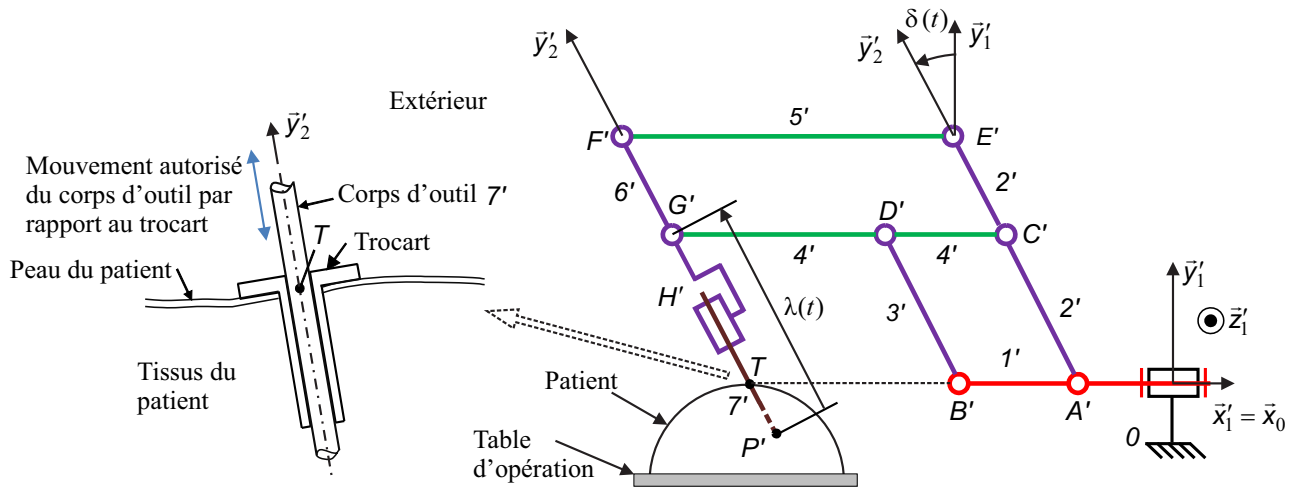


Figure 7 Schéma cinématique partiel 2D du bras esclave

Paramétrage et hypothèses

Solide	Caractéristiques	Situation géométrique/commentaires
1'	$\overrightarrow{A'B'} = -h_1 \vec{x}_0$	repère attaché : $R'_1(A', \vec{x}_0, \vec{y}_1', \vec{z}_1')$ paramètres d'orientation : $\varphi(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1') = (\vec{z}_0, \vec{z}_1')$
2'		repère attaché : $R'_2(A', \vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_1')$ paramètres d'orientation : $\delta(t) = (\vec{x}_1', \vec{x}_2') = (\vec{y}_1', \vec{y}_2')$
3'	$\overrightarrow{B'D'} = h_2 \vec{y}_2'$	
4'	$\overrightarrow{D'G'} = -h_4 \vec{x}_0$	
7'	$\overrightarrow{H'P'} = -l_0 \vec{y}_2'$ $\overrightarrow{G'P'} = -\lambda(t) \vec{y}_2'$	repère attaché : $R'_7(H', \vec{x}_7', \vec{y}_2', \vec{z}_7')$ paramètres d'orientation : $\gamma(t) = (\vec{x}_2', \vec{x}_7') = (\vec{z}_2', \vec{z}_7')$
8'	masse et inertie du motoréducteur (2) négligées inertie autour de l'axe de rotation du moteur négligée rapport de réduction (ou de transmission) : k_2 tel que $ k_2 < 1$ rayon : r'_8	

$$\overrightarrow{F'E'} = \overrightarrow{G'C'} ; \overrightarrow{F'G'} = \overrightarrow{E'C'} ; \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{C'A'} ; \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{B'A'}.$$

II.A – Justification de la structure

Objectif

Justifier la structure du bras esclave par rapport au cahier des charges.

Le point T est situé à l'intersection des axes $(A', \vec{x}_0)$ et $(P', \vec{y}_2')$. Le vecteur vitesse du point T de 7' par rapport à 0, noté $\vec{V}_{T,7'/0}$, doit être colinéaire à $\vec{y}_2'$.

Q 8. En s'appuyant sur la figure 7, exprimer $\vec{V}_{T,7'/0}$ dans la base $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$ en fonction des données de l'énoncé. Il est conseillé d'utiliser la relation de Varignon en passant par le point P' et de calculer $\vec{V}_{P',7'/0}$ par dérivation du vecteur position.

Q 9. Exprimer le torseur cinématique de 7'/0 réduit en T , par ses composantes dans la base $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$ et donner la liaison équivalente entre 7' et 0 au point T .

Q 10. Quelle exigence du cahier des charges (document réponse) justifie cette structure ? Expliquer sans calcul.

II.B – Analyse du modèle dynamique du bras esclave

Objectif

Déterminer les équations du mouvement du bras esclave sous la forme $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = \vec{F}$.

Pour toute la suite du sujet, on ne s'intéresse pas au mouvement de rotation de 1' par rapport à 0. Par conséquent, on considère 1' fixe par rapport à 0, soit $\vec{x}_1' = \vec{x}_0$, $\vec{y}_1' = \vec{y}_0$ et $\vec{z}_1' = \vec{z}_0$.

Avec cette restriction, seuls trois mouvements de l'outil subsistent :

- la rotation du corps de l'outil 7' par rapport à 6', autour de $(T, \vec{y}_2')$, ce mouvement ne sera pas étudié ici ;
- la rotation du corps d'outil 7' par rapport au bâti 0 autour de $(T, \vec{z}_0)$. La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par la structure globale étudiée aux questions précédentes, associée à une came circulaire liée au bâti sur laquelle roule sans glisser le galet 9' ;
- la translation du corps d'outil 7' par rapport au porte-outil 6'. La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par un système complexe de câbles donné figure 6.

Les trois degrés de liberté du corps d'outil sont obtenus au moyen de la structure retenue (figures 6 et 7) à laquelle deux axes asservis sont associés. Avec cette structure, une variation de l'angle $\delta(t)$ n'entraîne pas une variation de $\lambda(t)$. Les deux axes sont donc indépendants géométriquement.

Les équations du mouvement des axes 1 et 2 (repérés sur la figure 6) sont nécessaires pour réaliser une synthèse des correcteurs. Dans le cadre de ce sujet, on se limite à la détermination de l'équation du mouvement de l'axe 2 (décrivant l'évolution de la grandeur $\lambda(t)$).

La figure 8 montre le détail du moto-réducteur 2. Pour simplifier, on considère que le câble est enroulé sur un demi-tour du tambour 8'. θ_2 est l'angle du rotor du moteur par rapport à son stator 2'.

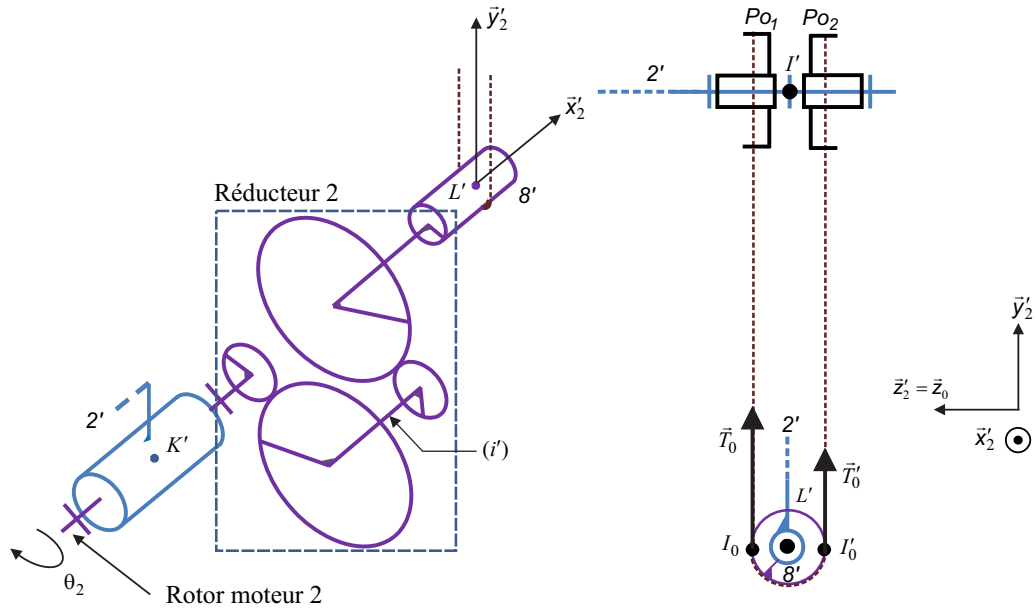


Figure 8 Moto-réducteur (les deux liaisons pivot entre l'arbre intermédiaire (i') d'une part, puis entre l'arbre de sortie du réducteur lié au tambour 8' d'autre part et le solide 2' sont omises)

- Le repère R_0 est supposé galiléen. La verticale ascendante est $\vec{y}_0$.
- Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison d'un solide i sur un solide j , réduit en un point M , est noté :

$$T_{i \rightarrow j} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{M, i \rightarrow j} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{M, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0}$$

- Le torseur dynamique d'un solide i par rapport au repère R_0 , réduit en un point M , est noté :

$$D_{i/0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{D}_{i/0} \\ \vec{\delta}_{M, i/0} \end{array} \right\}_M$$

- La force exercée par le tissu humain sur le corps d'outil 7' est modélisée par le glisseur $(P', \vec{F}_e)$ avec $\vec{F}_e = F_x(t)\vec{x}_2' + F_y(t)\vec{y}_2'$.
- L'effort du corps d'outil 7' sur le câble est modélisé par le glisseur $(Q', \vec{F})$, Q' (voir figure 6) étant le point d'attache entre le corps d'outil 7' et le câble avec $\vec{F} = F(t)\vec{y}_2'$.
- L'action de la pesanteur sur 7' est négligée devant les efforts mis en jeu.
- H' est le centre d'inertie de 7', m_7' sa masse et $\vec{P'H'} = l_0\vec{y}_2'$.
- L'action du moteur 2 (utilisé pour le mouvement de translation de l'outil correspondant à l'« axe 2 ») est modélisée par un couple pur : $\vec{C}_{m2} = C_{m2}(t)\vec{x}_2'$.

- On note $\vec{C}_{\text{red}} = C_{\text{red}} \vec{x}_2'$, le couple moteur ramené à l'arbre de sortie du réducteur 2 solidaire de 8'. Une étude préalable a permis d'obtenir la relation $C_{\text{red}} = \frac{C_{m2}}{k_2}$ (k_2 étant le rapport de transmission du réducteur).
- Les actions mécaniques du câble sur 8' sont modélisées par deux glisseurs en I_0 et $I'_0 : (I_0, \vec{T}_0)$ et $(I'_0, \vec{T}'_0)$ avec

$$\vec{T}_0 = \left(T_t + \frac{F(t)}{2} \right) \vec{y}_2' \quad \text{et} \quad \vec{T}'_0 = \left(T_t - \frac{F(t)}{2} \right) \vec{y}_2'$$

T_t représente la valeur algébrique de la pré-tension dans les câbles pour assurer qu'ils soient tendus constamment en cours d'opération, quelle que soit la valeur de $F(t)$.

- Le rendement du réducteur est supposé unitaire. Le moment d'inertie du rotor du moteur 2 et des pièces du réducteur 2 sont négligées. La masse des câbles est négligée.

On se propose en premier lieu de déterminer l'expression du couple moteur $C_{m2}(t)$ en fonction de $F_y(t)$ et des paramètres du problème tel que

$$C_{m2}(t) = v_1 \left(F_y(t) + m'_7 \left(\frac{d^2 \lambda(t)}{dt^2} + v_2 \left(\frac{d\delta(t)}{dt} \right)^2 \right) \right)$$

où v_1 et v_2 sont des termes à expliciter en fonction de k_2 , r'_8 , l_0 , h_2 et λ .

Le tableau du document réponse donne en partie la démarche de résolution.

Q 11. Compléter le tableau du document réponse et justifier, sur la copie, le choix du théorème utilisé (équation scalaire) associé à chaque isolement, sans faire aucun calcul.

Q 12. Mettre en œuvre la démarche proposée pour chaque isolement en détaillant les calculs et exprimer littéralement v_1 et v_2 de l'expression de $C_{m2}(t)$ donnée plus haut.

La détermination de l'équation du mouvement pour l'axe 1 est plus complexe et n'est pas étudiée dans le cadre de ce sujet. Après linéarisation, les équations de mouvement des deux axes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta C_1(t) &= J \frac{d^2 \Delta \theta_1(t)}{dt^2} - k_1 \frac{r'_9}{r_0} h_2 \Delta F_x(t) \\ \Delta C_2(t) &= k_2 r'_8 \left(\Delta F_y(t) + m'_7 k_2 r'_8 \frac{d^2 \Delta \theta_2(t)}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

avec :

- $\Delta C_i(t)$ la variation du couple $C_{mi}(t)$ autour du couple de référence noté C_{m0i} , telle que $C_{mi}(t) = C_{m0i} + \Delta C_i(t)$, C_{mi} étant l'action mécanique du moteur de l'axe i ;
- $\Delta F_x(t)$ la variation de l'effort $F_x(t)$ autour de l'effort de référence F_{x0} , telle que $F_x(t) = F_{x0} + \Delta F_x(t)$;
- $\Delta F_y(t)$ la variation de l'effort $F_y(t)$ autour de l'effort de référence F_{y0} , telle que $F_y(t) = F_{y0} + \Delta F_y(t)$;
- $\Delta \theta_1(t)$ la variation de l'angle de rotation $\theta_1(t)$ du rotor du moteur 1 par rapport à son stator (lié à 2'), autour d'une position de référence θ_{10} , telle que $\theta_1(t) = \theta_{10} + \Delta \theta_1(t)$;
- $\Delta \theta_2(t)$ la variation de l'angle de rotation $\theta_2(t)$ du rotor du moteur 2 par rapport à son stator (lié à 2'), autour d'une position de référence θ_{20} , telle que $\theta_2(t) = \theta_{20} + \Delta \theta_2(t)$;
- J l'inertie équivalente de l'axe 1 dépendant des paramètres du système ;
- k_1 le rapport de réduction du réducteur 1 ;
- k_2 le rapport de réduction du réducteur 2 ;
- r_0 le rayon de la came circulaire liée au bâti ;
- r'_8 et r'_9 les rayons des tambours 8' et 9' respectivement.

On suppose les conditions initiales nulles et on note $\vec{\Delta C}(t) = (\Delta C_1(t) \ \Delta C_2(t))^T$, $\vec{\Delta a_e}(t) = (\Delta \theta_1(t) \ \Delta \theta_2(t))^T$ et $\vec{\Delta F}(t) = (\Delta F_x(t) \ \Delta F_y(t))^T$.

La mise sous forme matricielle (après transformation de Laplace) des équations de mouvement des deux axes aboutit à la relation suivante $\vec{\Delta a_e}(p) = M_{ae}(p) (\vec{\Delta C}(p) - M_{Fe}(p) \vec{\Delta F}(p))$ avec $M_{ae}(p)$ et $M_{Fe}(p)$ des matrices 2×2 (voir schéma bloc de la question 6 dans le document réponse).

À partir de ce modèle simplifié, la sous-partie suivante s'intéresse plus spécifiquement à la conception de la chaîne d'asservissement des axes.

— Objectif —

Concevoir la chaîne d'asservissement de l'axe 1.

Les études précédentes ont permis d'établir partiellement le modèle retenu, sous la forme du schéma bloc du document réponse. Cette représentation fondée sur les matrices a l'avantage de présenter un modèle concis. On y retrouve notamment :

- la matrice $C_{or}(p)$ qui représente les correcteurs utilisés pour chaque axe ;
- la matrice $M_{ot}(p)$ qui représente les actionneurs utilisés pour chaque axe ;
- la matrice M_2 telle que $\overrightarrow{\Delta a}(p) = M_2 \overrightarrow{\Delta a_e}(p)$ avec $\overrightarrow{\Delta a}(p) = (\Delta\delta(p) \Delta\lambda(p))^T$, $\Delta\delta(p)$ et $\Delta\lambda(p)$ étant les transformées de Laplace des variations des variables $\delta(t)$ et $\lambda(t)$ autour de leur position de référence.
- la matrice M_e telle que $\overrightarrow{\Delta P_e}(p) = M_e \overrightarrow{\Delta a}(p)$, avec $\overrightarrow{\Delta P_e}(p) = (\Delta x_e \Delta y_e)^T$ représentant les petites variations du point P' autour de la position de référence, exprimées dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Afin de synthétiser le correcteur associé à chaque axe, on reformule le modèle selon la représentation de la **figure 9** où les consignes sont directement les positions angulaires des deux arbres moteurs, obtenues à partir de la consigne du chirurgien. Les asservissements de chaque axe sont alors indépendants, ce qui facilite la conception des correcteurs. La perturbation correspond aux variations des composantes de l'effort extérieur exercé par le tissu humain sur le corps d'outil.

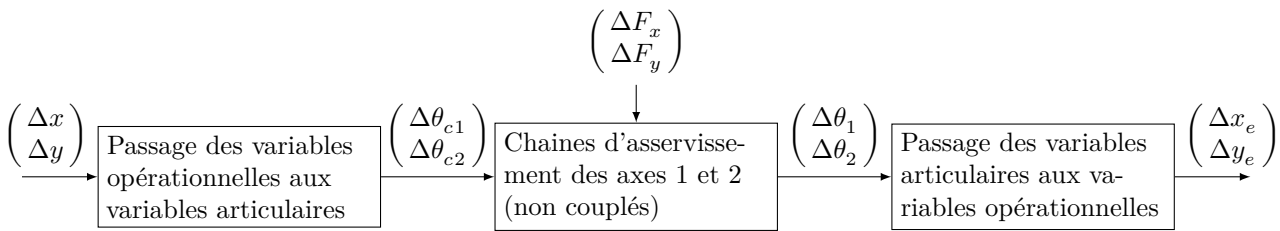


Figure 9 Modèle avec consignes angulaires issues de la consigne du chirurgien

On appelle « axe i » l'axe associé à la grandeur asservie $\Delta\theta_i$. La structure retenue pour l'asservissement est identique pour les deux axes. L'étude est restreinte à la conception du correcteur de l'axe 1.

Hypothèses, notations et paramétrage

- Les conditions initiales sont nulles.
- On rappelle l'équation du mouvement de l'axe 1 :

$$\Delta C_1(t) = J \frac{d^2 \Delta\theta_1(t)}{dt^2} - k_1 \frac{r'_9}{r_0} h_2 \Delta F_x(t)$$

avec $J = 1,98 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $k_1 \frac{r'_9}{r_0} = 0,00717$, $h_2 = 0,2 \text{ m}$.

- Le couple moteur $\Delta C_1(t)$ est fourni par une machine à courant continu modélisée par les équations suivantes :

$$u_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) + e_1(t) \quad e_1(t) = k_e \frac{d\Delta\theta_1(t)}{dt} \quad \Delta C_1(t) = k_t i_1(t) \quad (\text{II.1})$$

avec $u_1(t)$ la tension aux bornes du moteur, $i_1(t)$ l'intensité traversant le moteur et $e_1(t)$ la force contre électromotrice, avec $R = 2,07 \Omega$, $k_t = 0,0525 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$ et $k_e = 0,0525 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$.

- On fait l'hypothèse que l'influence de l'inductance L est négligeable sur les performances attendues, soit $L = 0$.
- La consigne est notée $\Delta\theta_{c1}(t)$.

Le cahier des charges sélectif conduit à choisir un correcteur associant une anticipation (via la présence de σ_4 dans la relation suivante) et une correction PID. La tension de commande du moteur est donnée par :

$$U_1(p) = (\Delta\theta_{c1}(p) - \Delta\theta_1(p)) \left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} \right) - \sigma_3 p \Delta\theta_1(p) + \sigma_4 \Delta\theta_{c1}(p) \quad (\text{II.2})$$

avec $\Delta\theta_{c1}(p)$ la consigne de position angulaire exprimée dans le domaine symbolique.

Q 13. Compléter le schéma bloc du document réponse (forme littérale des fonctions de transfert).

Pour la suite, on considère la perturbation nulle ($\Delta F_x(p) = 0$).

Q 14. À partir de ce schéma bloc, en notant $H_{\text{processus}}(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K}{(1 + \tau p)p}$, exprimer K et τ en fonction des données de l'énoncé, puis les calculer numériquement.

Q 15. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée, sous sa forme canonique, notée $B_F(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{\Delta\theta_{c1}(p)}$ en fonction de K , τ , σ_1 , σ_2 , σ_3 et σ_4 .

On pose :

$$B'_F(p) = \frac{p - z_0}{(p - p_2)(p - p_1)^2}$$

Q 16. Déterminer K' tel que $B_F(p) = K' B'_F(p)$, K' étant un gain constant.

Q 17. Exprimer les paramètres σ_1 , σ_2 et σ_3 de la relation (II.2) en fonction de p_1 , p_2 , K et τ .

Pour information, en poursuivant le calcul, on trouve $\sigma_4 = \frac{\tau}{K} \left(\frac{p_1^2 p_2}{z_0} - (p_1^2 + 2p_1 p_2) \right)$.

Le réglage des paramètres du correcteur se fait en fixant judicieusement les pôles et le zéro de $F(p)$:

- p_1 est choisi pour correspondre au mode d'un système du second ordre. En notant z le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre, l'expression retenue pour p_1 est $p_1 = -z\omega_0$;
- p_2 est une constante choisie négative. Il sera admis sans justification que $p_2 = -10$;
- z_0 est choisi de manière à compenser le pôle p_2 .

Afin d'assurer le non dépassement de la réponse indicielle, tout en assurant un temps de réponse le plus faible possible, on choisit de prendre $z = 1$ et $t_{r5\%} = 35$ ms, ce qui implique la relation $\omega_0 t_{r5\%} = 5$.

Q 18. Donner les valeurs numériques de p_1 et de z_0 . En déduire les valeurs numériques des paramètres σ_1 , σ_2 et σ_3 de la loi de commande (II.2).

Q 19. Le système est-il stable avec le réglage précédent ? Justifier sans calcul.

Pour information, on a $\sigma_4 = -2,23 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$.

Q 20. Vérifier, en justifiant la réponse et sans calcul, si les exigences 1.2.2.1, 1.2.2.2 et 1.1.1 sont respectées.

III Analyse de l'impact des bruits de mesure

— Objectif —

Compléter la loi de commande afin de limiter la sensibilité du système aux bruits de mesure.

Le moteur retenu possède les caractéristiques suivantes : tension nominale de 42 V, couple maximal en fonctionnement de 113 mN.m. De plus, lorsque la vitesse de rotation de l'arbre moteur est nulle, pour des raisons techniques, la valeur absolue du couple moteur ne doit pas excéder 10% du couple maximal, soit 11,3 mN.m en réponse aux sollicitations dues aux bruits de mesure.

Le dimensionnement de la loi de commande effectué à la partie précédente ne prend pas en compte tous les phénomènes indésirables susceptibles de dégrader les performances du système étudié. L'un d'entre eux est le bruit de mesure du capteur de position angulaire des axes moteurs. Le signal brut issu du capteur est de nature analogique. Pour qu'il soit exploitable par le calculateur, ce signal est numérisé. On obtient alors une image de la position sous la forme d'un ensemble de points. On note T_e la période d'échantillonnage.

On note f_k , $k \in \mathbb{N}$ la valeur d'une fonction continue $f(t)$ prise au k -ième échantillonnage, c'est-à-dire que $f_k = f(kT_e)$. En sortie du convertisseur analogique/numérique, seules les valeurs f_k pour k entier sont disponibles.

Pour l'axe 1, $\Delta\theta_1(t)$ est l'angle en sortie du moteur et s_k est la grandeur numérisée de la position angulaire mesurée.

L'imperfection de la chaîne de mesure implique la présence d'une composante aléatoire sur chaque valeur de s_k image de l'angle $\Delta\theta_1(t)$, en plus de la composante non aléatoire. Chaque valeur s_k peut donc se décomposer sous la forme d'une somme d'une composante non aléatoire notée s_k^a et d'une composante aléatoire notée s_k^b de variance $\text{var}(s_k^b)$ identique pour tout k . De plus, s_k^b et s_{k-1}^b sont des variables aléatoires indépendantes.

La loi de commande (II.2) est, en pratique, réalisée numériquement. Sa discrétisation conduit à la forme suivante

$$u_{1k} = \sigma_1 \cdot (s_{ck} - s_k) + \sigma_2 \cdot h(s_{ck} - s_k) - \sigma_3 \cdot g(s_k) + \sigma_4 \cdot s_{ck}$$

avec

- s_{ck} la valeur au k -ième instant de l'image de la consigne ;
- $h(s_{ck} - s_k)$ une fonction permettant d'approcher l'intégrale d'une grandeur numérique ;
- $g(s_k)$ une fonction permettant d'approcher la dérivée d'une grandeur numérique ;
- u_{1k} la tension de commande du moteur prise au k -ième instant.

Le schéma fonctionnel pour la prise en compte des bruits de mesure est donné **figure 10**. Pour simplifier, la perturbation due à la réaction du tissu humain sur l'outil n'est pas prise en compte. On suppose que le CNA (Convertisseur Numérique Analogique) n'a pas d'influence sur l'étude menée.

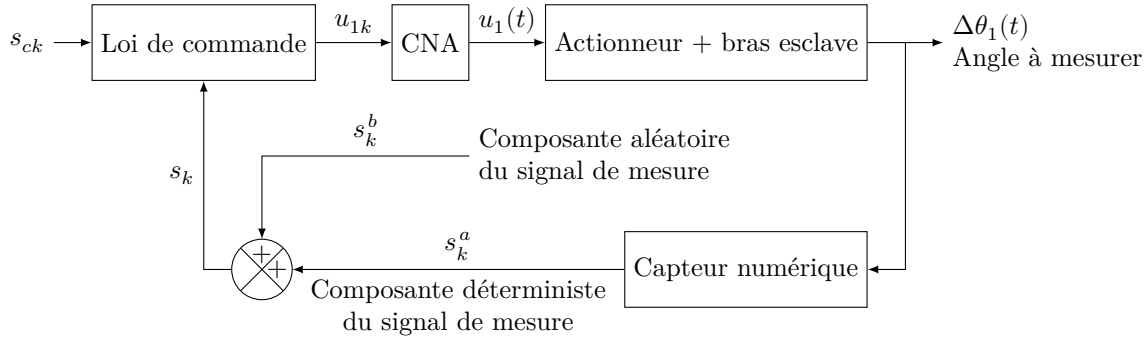


Figure 10 Modèle utilisé pour la simulation

Ainsi, une simulation a été réalisée pour une consigne en échelon de position nulle ($\forall k \in \mathbb{N}, s_{ck} = 0$) pour visualiser l'impact du bruit de mesure de l'axe 1. De plus, chaque terme s_k^b est modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne nulle et d'écart type $3,3 \times 10^{-4}$ rad, soit une variance de $1,1 \times 10^{-7}$ rad². La période d'échantillonnage est $T_e = 100$ μ s.

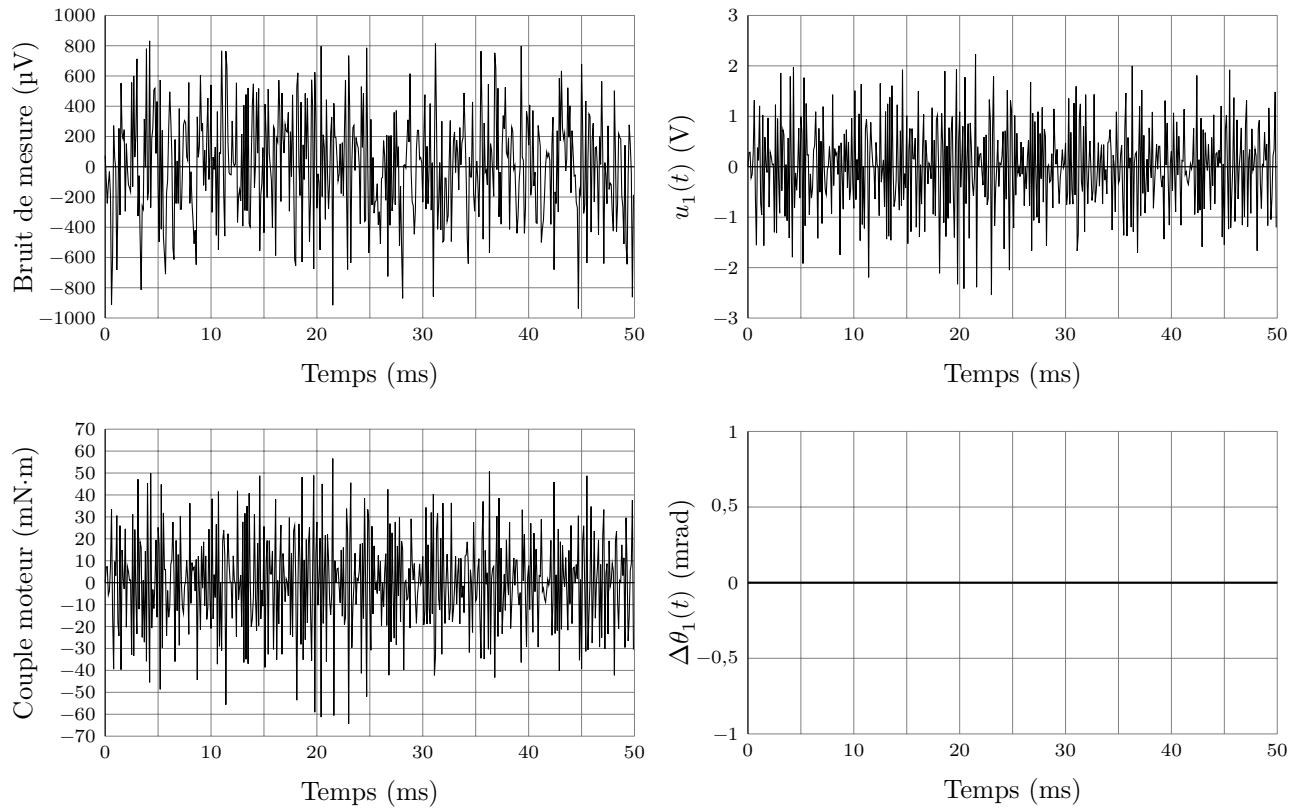


Figure 11 Résultats de la simulation, impact du bruit de mesure

Q 21. En justifiant, expliquer pourquoi il est nécessaire de filtrer le bruit de mesure en observant les courbes de tension de commande, puis du couple moteur.

Q 22. En observant la courbe représentative de $\Delta\theta_1(t)$ de la **figure 11**, justifier pourquoi les imperfections de la chaîne de mesure n'influencent pas la position angulaire $\Delta\theta_1(t)$.

Q 23. En utilisant les équations du moteur (II.1) et en se plaçant à un point de fonctionnement stabilisé, c'est-à-dire à vitesse nulle, déterminer la valeur numérique maximale (en valeur absolue) de la tension à ne pas dépasser pour que le couple n'excède pas 11,3 mN·m en valeur absolue.

Afin de limiter les effets néfastes du bruit de mesure sur le système, un filtre numérique est intégré dans la chaîne de mesure, cf [figure 12](#).

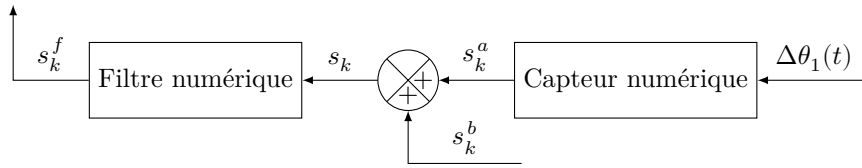


Figure 12 Intégration du filtre numérique

On note s_k^f la valeur filtrée au k -ième instant. L'objectif de l'étude qui suit est de limiter la variation de tension engendrée par le bruit de mesure en dimensionnant le filtre. Seul l'impact du bruit est étudié, donc on considère la consigne de position nulle, et au vu des résultats de simulation, on fera dans ce cas l'hypothèse que $\Delta\theta_1(t) = 0$ rad, ce qui implique $\forall k \in \mathbb{N}, s_k^a = 0$.

La [question 23](#) a permis de déterminer une valeur absolue maximale de la tension à ne pas dépasser. On admettra que ce résultat impose alors une variance maximale de $0,02 \text{ V}^2$ pour u_{1k} .

Le filtre numérique retenu est l'équivalent d'un filtre passe-bas analogique du premier ordre, de constante de temps T_f et de gain statique unitaire.

Q 24. Dans le cas d'une réalisation analogique du filtre, donner la relation entre $s^f(t)$, $s(t)$ et T_f , sous la forme d'une équation différentielle. En déduire l'expression de s_k^f en fonction de s_k , s_{k-1}^f , T_f et T_e dans le cas d'une réalisation numérique. On retiendra la formule suivante pour la dérivée discrète correspondant à la dérivée continue d'une fonction temporelle $f(t)$ à l'instant $t = kT_e$: $\frac{f_k - f_{k-1}}{T_e}$ où T_e est la période d'échantillonnage.

On rappelle que si x et y sont des variables aléatoires de variance $\text{var}(x)$ et $\text{var}(y)$ respectivement, a et b des nombres réels, alors on a :

$$\text{var}(ax + b) = a^2 \text{var}(x) \quad \text{var}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y) + 2 \text{cov}(x, y)$$

Si les deux variables aléatoires sont indépendantes, alors $\text{cov}(x, y) = 0$.

L'estimation de la variance du signal filtré, notée $\text{var}(s_k^f)$, est nécessaire pour dimensionner le filtre. Plusieurs centaines de simulations ont montré que l'évolution de $\text{var}(s_k^f)$ en fonction de k reste similaire à celle montrée à la [figure 13](#). Pour un nombre d'échantillons suffisamment important, la variance devient constante et sa valeur dépend de T_f .

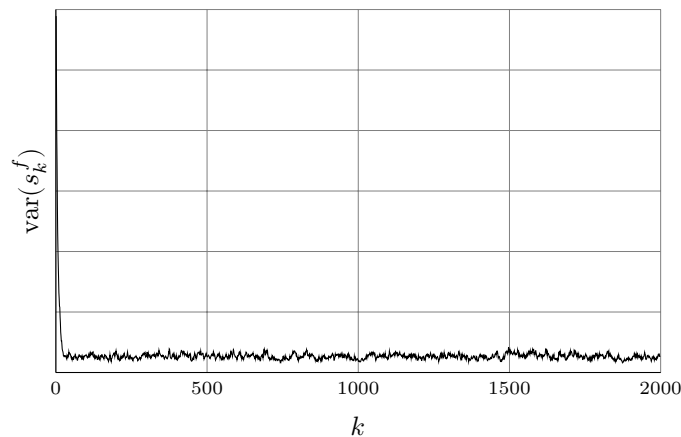


Figure 13 Évolution de $\text{var}(s_k^f)$ en fonction de k

Q 25. Quelle approximation peut-on faire concernant $\text{var}(s_k^f)$ et $\text{var}(s_{k-1}^f)$? Justifier la réponse.

Q 26. Exprimer alors $\text{var}(s_k^f)$ en fonction de $\text{var}(s_k)$, T_f et T_e .

On admettra que la relation entre $\text{var}(s_k^f)$ et $\text{var}(u_{1k})$ en utilisant la loi de commande avec les paramètres du correcteur dimensionné dans la partie précédente est, pour tout k ,

$$\text{var}(u_{1k}) = n_0 \text{var}(s_k^f) \quad \text{avec} \quad n_0 = 6337147$$

Q 27. Donner l'expression littérale de T_f , puis calculer sa valeur en secondes qui permet d'assurer une variance du signal de commande $\text{var}(u_{1k}) \leq 0,02 \text{ V}^2$. On rappelle les valeurs suivantes : $\text{var}(s_k) = 1,1 \times 10^{-7} \text{ rad}^2$, $T_e = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$.

IV Synthèse globale

Une simulation complète intégrant la modélisation des deux axes a permis d'obtenir la valeur du déplacement de l'outil en réponse à une impulsion de Dirac de la perturbation (choc brutal de l'outil sur un os par exemple) ainsi que l'écart entre le déplacement de l'outil et la consigne, lorsque la consigne est une rampe de pente $0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (vitesse limite haute moyenne pour une opération prostatique) suivant les axes $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$. Des résultats partiels de cette simulation sont donnés [figure 14](#).

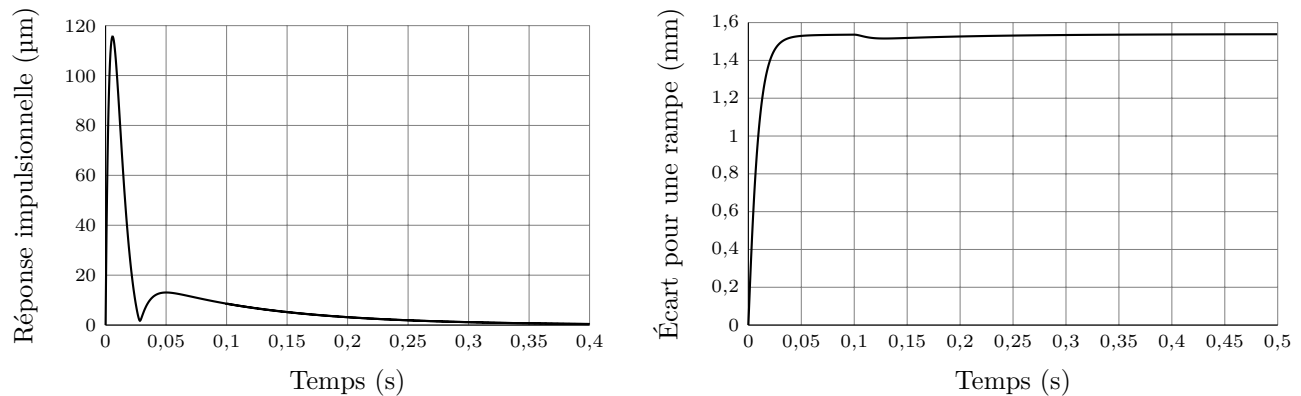


Figure 14 Réponse à une perturbation impulsionnelle / Écart global pour une consigne en rampe

Q 28. Citer les exigences pouvant être vérifiées par ces résultats de simulation et justifier pour chacune si elles le sont ou non.

• • • FIN • • •