CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI **2015**

4 heures Calculatrices autorisées

I Autour des matrices tridiagonales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par convention $M^0 = I_n$.

Les trois sous-parties I.A, I.B et I.C sont indépendantes.

I.A – Cas des matrices 3×3 et 4×4 — Applications en physique et en chimie

I.A.1) Préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $a_0, \ldots, a_N$ dans $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P \left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k \right) P^{-1}$.

c) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k B^k$ lorsque B est la matrice diagonale : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

I.A.2) Diagonalisation d'une famille de matrices 3×3

On considère, dans cette question, les matrices $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice diagonale D_3 et une matrice inversible P_3 telles que $A_3 = P_3 D_3 P_3^{-1}$.

b) On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base.

c) Justifier que toute matrice $M(a,b,c)$ de $\mathcal{F}$ est diagonalisable.

d) Exprimer A_3^2 en fonction de J et de I_3.

e) Soit $M(a,b,c)$ appartenant à $\mathcal{F}$. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, A_3 et A_3^2.

f) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $M(a,b,c)$.

I.A.3) Application en physique

On considère, dans cette question, la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère un système de 3 oscillateurs couplés, où les 4 ressorts sont identiques et de constante de raideur k. Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1, x_2 et x_3 à partir de leur position d'origine respective O_1, O_2 et O_3, positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus. On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m}, x_{2m} et x_{3m} sans vitesse initiale.

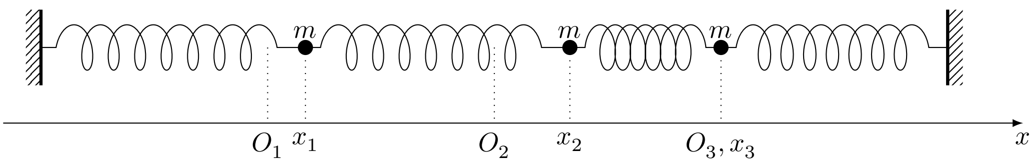

Figure 1

On montre, en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en posant $\omega_0^2 = k/m$ (avec $\omega_0 \in \mathbb{R}^{+*}$), que les abscisses x_1, x_2 et x_3 vérifient le système différentiel

$$(S1) : \begin{cases} x_1''(t) &= -2\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 x_2(t) \\ x_2''(t) &= \omega_0^2 x_1(t) - 2\omega_0^2 x_2(t) + \omega_0^2 x_3(t) \\ x_3''(t) &= \omega_0^2 x_2(t) - 2\omega_0^2 x_3(t) \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice M_3 telle que $(S1)$ s'écrive $X''(t) = M_3 X(t)$.

b) Exprimer cette matrice M_3 en fonction de A_3 et de I_3.

c) En déduire une matrice D_3' diagonale et une matrice P_3' inversible telles que $M_3 = P_3' D_3' P_3'^{-1}$.

d) Résoudre alors le système $(S1)$, c'est-à-dire déterminer les expressions de x_1, x_2 et x_3 en fonction de t et des conditions initiales x_{1m}, x_{2m} et x_{3m}.

I.A.4) Application en chimie

On considère, dans cette question, la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

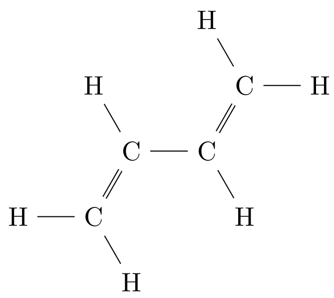

Figure 2 trans-butadiène

Dans le modèle quantique de l'atome, on ne considère plus que les électrons d'un atome sont en orbite circulaire autour du noyau, mais occupent de manière probabiliste certaines régions de l'espace autour du noyau. Une orbitale atomique correspond à une région de l'espace dans laquelle on a 95% de chance de trouver un électron considéré. Pour une molécule, constituée de plusieurs atomes, on parle d'orbitale moléculaire. En 1930, Hückel publie une méthode permettant de déterminer des orbitales moléculaires qui conduit à diagonaliser des matrices tridiagonales. Par exemple, si on s'intéresse à la construction des orbitales moléculaires du trans-butadiène (figure 2), les orbitales moléculaires, notées π, sont des combinaisons linéaires d'orbitales atomiques, notées respectivement p_1, p_2, p_3 et p_4 des atomes de carbone, elles s'écrivent sous la forme $\pi = C_1 p_1 + C_2 p_2 + C_3 p_3 + C_4 p_4$.

On est alors amené à déterminer les valeurs de ε, pour lesquelles il existe C_1, C_2, C_3 et C_4 réels non tous nuls, solutions du système

$$(S2) : \begin{cases} \alpha C_1 + \beta C_2 &= \varepsilon C_1 \\ \beta C_1 + \alpha C_2 + \beta C_3 &= \varepsilon C_2 \\ \beta C_2 + \alpha C_3 + \beta C_4 &= \varepsilon C_3 \\ \beta C_3 + \alpha C_4 &= \varepsilon C_4 \end{cases}$$

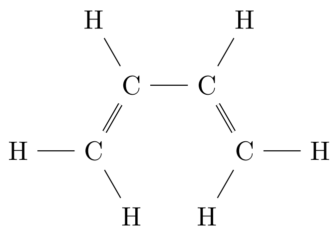

Figure 3 cis-butadiène

Les différentes valeurs de ε que l'on va trouver correspondent aux énergies des différentes orbitales moléculaires possibles. α et β sont des constantes données, indépendantes des atomes de carbone considérés. La constante α correspond à une énergie propre à l'atome de carbone. La constante β correspond à une énergie d'interaction entre deux atomes de carbone voisins.

a) À la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de quelle matrice correspond la recherche des ε, pour lesquelles il existe C_1, C_2, C_3 et C_4 non tous nuls, solutions de $(S2)$?

On note M_4 cette matrice.

b) Exprimer M_4 en fonction de I_4 et de A_4.

c) On admet que si on pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $D_4 = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi \end{pmatrix}$ et $P_4 = \begin{pmatrix} \varphi - 1 & \varphi & \varphi & \varphi - 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \varphi - 1 & \varphi & -\varphi & 1-\varphi \end{pmatrix}$, alors P_4 est inversible et on a $D_4 = P_4^{-1} A_4 P_4$.

Déterminer, en fonction de φ, une matrice D_4' diagonale et une matrice P_4' inversible telle que $D_4' = P_4'^{-1} M_4 P_4'$. En déduire les différentes valeurs de ε possibles et, pour chaque valeur de ε, les valeurs de C_1, C_2, C_3 et C_4 correspondantes.

d) On s'intéresse maintenant aux orbitales moléculaires de la molécule de cis-butadiène (cf figure 3). On souhaite appliquer à cette molécule la même méthode que précédemment, mais sans négliger l'énergie d'interaction entre le premier et le dernier atome de carbone. Quels coefficients de M_4 doit-on modifier ? On ne demande pas de calcul.

I.B – Diagonalisation de A_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on appelle χ_n le polynôme caractéristique de A_n : $\chi_n(X) = \det(XI_n - A_n)$ et, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, on pose $u_n = \chi_n(2\cos\alpha) = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos\alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2\cos\alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$.

I.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, déterminer une relation de récurrence liant u_n, u_{n-1} et u_{n-2}.

I.B.2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$.

I.B.3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, A_n possède n valeurs propres deux à deux distinctes, que l'on explicitera.

I.B.4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A_n.

On pourra considérer les vecteurs $X_\alpha = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \sin 2\alpha \\ \vdots \\ \sin n\alpha \end{pmatrix}$.

I.C – Localisation des valeurs propres de certaines matrices tridiagonales

Dans cette sous-partie, on considère un entier $n \geqslant 2$, a et b deux nombres réels strictement positifs et B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante : $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathrm{sp}(B)$ le spectre de la matrice B c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice réelle B et, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $C_\lambda = B - \lambda I_n$. Le but de cette sous-partie est de localiser les valeurs propres réelles de B, c'est-à-dire de trouver un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sp}(B) \subset I$.

I.C.1) Soit λ une éventuelle valeur propre réelle de B. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, non nul, vérifiant $C_\lambda X = 0$.

On pose $|x_k| = max(|x_1|, ..., |x_n|)$.

a) En examinant la k-ième ligne du système $C_\lambda X = 0$, montrer que $|\lambda| \leqslant a + b$.

b) En déduire un premier intervalle I tel que $\mathrm{sp}(B) \subset I$.

I.C.2) Dans la suite de cette sous-partie, on considère λ quelconque dans $\mathbb{R}$.

On dira qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (R) lorsque l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} : bu_k - \lambda u_{k+1} + au_{k+2} = 0$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Montrer que X vérifie $C_\lambda X = 0$ si et seulement si les nombres $x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ sont les $n+2$ premiers termes d'une suite vérifiant (R).

I.C.3) On suppose dans cette question que $\lambda^2 > 4ab$.

a) Déterminer l'ensemble des suites vérifiant (R).

b) Montrer que si un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ vérifie $C_\lambda X = 0$ alors c'est le vecteur nul.

I.C.4) On suppose dans cette question que $\lambda^2 = 4ab$.

a) Déterminer l'ensemble des suites vérifiant (R).

b) Montrer que si un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ vérifie $C_\lambda X = 0$ alors c'est le vecteur nul.

I.C.5) En déduire que $\mathrm{sp}(B) \subset]-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}[$.

I.C.6) Le résultat de la question I.C.5 est-il meilleur que celui du I.C.1 ?

II Séries de pile ou face

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté. Pour décrire la succession de n lancers, on introduit la notion de séries de lancers amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi, la première série est de longueur $m \in [\![1, n-1]\!]$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)$-ième l'autre côté, et de longueur n si les n lancers ont amené le même côté de la pièce. Si la longueur de la première série est égale à $m < n$, la deuxième série commence au $(m+1)$-ième lancer et se termine au lancer précédant un changement de côté s'il y a au moins un deuxième changement de côté au cours des n lancers, sinon on dit qu'elle est de longueur $n-m$. On peut définir de même les séries suivantes.

Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou face au bout de n lancers. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ième lancer amène pile » et F_i l'événement contraire.

Les deux sous-parties II.A et II.B sont indépendantes.

II.A – Étude des longueurs de séries

On considère dans cette sous-partie que $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

II.A.1) On note L_1 la longueur de la première série.

a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$ (ensemble des valeurs prises par L_1).

b) On suppose que $m < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+1$. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m)$.

c) On suppose maintenant que $m = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = n)$.

d) Vérifier que $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m) = 1$.

II.A.2) On note L_2 la longueur de la deuxième série, s'il y en a une, et on pose $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série.

a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.

b) On suppose que $m + k < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+k+1$. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

c) On suppose que $m + k = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

d) En déduire la valeur de $P(L_2 = k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

e) Calculer $P(L_2 = 0)$.

II.B – Étude du nombre de séries lors de n lancers

On considère dans toute cette sous-partie que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = 1/2$. On suppose que l'on effectue n ($n \geqslant 3$) lancers indépendants et on note N_k le nombre de séries lors des k premiers lancers ($k \leqslant n$). Par exemple, si on prend $n = 11$ et si les lancers successifs donnent : `FFPPPPFFPPP` (`F` désignant face et `P` pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_{11}$: $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$, $N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$ et $N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4$. On admettra que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, N_k est une variable aléatoire sur Ω_n.

II.B.1) Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

II.B.2) Déterminer $N_n(\Omega_n)$, puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

II.B.3) Fonctions génératrices de N_n

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$, $G_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k$.

a) Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

b) Que représente $G_n'(1)$?

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})$$

Montrer alors que $P(N_n = k) = \dfrac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \dfrac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1)$.

d) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $G_n(s) = \dfrac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$.

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$.

e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n lancers.

• • • FIN • • •