# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet propose l'étude du comportement asymptotique d'une suite $(u_n)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$, où $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en fonction de la condition initiale $u_0$ et du rayon spectral $\rho(A)$.

La première partie présente l'étude du cas où $A$ est une matrice orthogonale et/ou à valeurs propres réelles. La deuxième partie applique cette étude à un problème issu des probabilités. La partie III, qui constitue le cœur du sujet, établit le rapport entre le rayon spectral et le caractère borné ou convergent de la suite $(u_n)$. Enfin, la partie IV illustre l'étude générale par la méthode de Jacobi procurant une valeur approchée de la solution exacte de l'équation $MX = B$.

## Analyse globale des résultats

Les candidats ont abordé principalement les parties II et III qui étaient les plus denses, la partie I partiellement, et très peu la partie IV qui pourtant offrait des opportunités car peu difficile.

La différence s'est souvent faite sur la partie II, qui a convenu aux candidats avec une bonne approche intuitive des probabilités, tout en étant capable de mettre en forme leurs explications. La partie III était incontournable par le nombre de questions posées, mais les candidats ont commis de nombreuses maladresses dues à la mauvaise compréhension de la notion de norme matricielle introduite dans l'énoncé.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

L'erreur principale rencontrée dans les copies est la confusion entre norme d'un vecteur et norme d'une matrice. Cette dernière notion n'est pas directement au programme de TSI, et l'énoncé prenait bien soin de l'introduire et de la nommer $C(P)$. À ce sujet, les étudiants n'hésitent pas à manipuler les normes comme des valeurs absolues de nombres réels et il n'est pas rare de rencontrer l'écriture : $\|AX\| = \|A\|\|X\|$ !

Pour généraliser, le jury déplore le manque de rigueur de certaines candidats sur la forme autant que sur le fond. Il rappelle que les mathématiques sont une science exacte et que la présentation des arguments nécessite de la précision et un respect des normes de la rédaction mathématique.

Passons au détail des questions significatives du sujet.

### Partie I

**I.A.1)** Trop peu de candidats pensent à écrire la conservation de la norme et l'hypothèse $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ est assez souvent ignorée.

**I.A.2)** Beaucoup de candidats remarquent (souvent sans justification) la condition suffisante $u = 0$, et franchissent sans hésiter le pas entre condition nécessaire et condition suffisante.

**I.A.3)** La nature des valeurs propres réelles d'une isométrie n'est pas connue. Et quand c'est le cas, la conséquence de l'appartenance à $T_3(\mathbb{R})$ est peu mentionnée.

**I.B.1)** La question des valeurs de $s$ est assez bien traitée en général, même si certains candidats pensent que $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$ (ce qui n'est qu'une condition nécessaire).

Ensuite beaucoup répondent correctement « $A$ est une rotation » ou « $A$ est une symétrie », mais souvent sans justification.

**I.B.2)** Beaucoup de candidats calculent correctement le polynôme caractéristique, voient que $s \in \mathbb{R}^+$, mais en déduisent que $\rho(B_s) = +\infty$.

**I.B.3)** Une des questions les plus traitées.

**I.B.4)** Très peu abordée.

### Partie II

**II.A** – Bien fait en général

**II.B** – Assez bien fait en général, même s'il manque souvent les explications.

**II.C** – Peu de candidats pensent à préciser que $(A_n, B_n, C_n)$ est un système complet d'évènements. La plupart énoncent correctement la formule des probabilités totales.

**II.E** –Presque tous les candidats ont répondu à cette question.

**II.F.1)** Assez bien traitée en général, souvent au prix de contorsions particulièrement pénibles à lire. Cependant, un nombre non négligeable de candidats proposent une démonstration par récurrence, révélant ainsi leur manque de compréhension de ce type de raisonnement.

**II.F.2)** Bien traité par ceux qui n'ont pas fait l'impasse sur la récurrence linéaire d'ordre 2. Parmi les autres, la plupart donnent la forme générale des solutions, une minorité appréciable donne la valeur correcte de $c_n$. Très peu pensent à utiliser la relation $a_n + b_n + c_n = 1$.

**II.F.3)** Lorsque qu'ils ont traité la question précédente, les candidats concluent en général correctement que $b_n$ tend vers 0.

**II.G.1)** Beaucoup de « $[2, n]$ avec $n \in \mathbb{N}$ » ce qui est incorrect sur la forme. On peut comprendre le fond, mais ce n'est pas à l'examinateur de faire l'effort de pallier les carences d'expression du candidat. Rappelons que la clarté et la précision sont très importantes en mathématiques.

**II.G.2)** Même remarque à propos de $A_n + C_{n-1}$, lu très souvent au lieu de $A_n \cap C_{n-1}$. Ce n'est pas acceptable.

**II.G.3)** Beaucoup de candidats voient le lien avec la dérivée de $1/(1-x)$. Peu savent quel théorème ils appliquent, ni même qu'ils appliquent un théorème. Une infime minorité voit le rapport avec l'espérance.

### Partie III

Dans cette partie, un trop grand nombre de candidats s'est affranchi de toute rigueur mathématique : en particulier, la norme euclidienne d'une matrice colonne est appliquée sans réflexion aux matrices carrées et ces normes en question se retrouvent avec les propriétés multiplicatives des modules de nombres complexes ! Une telle lecture a été fort éprouvante pour le jury, qui n'a pas fait de concessions.

Toutefois, même les candidats les plus en difficulté sur cette partie ont pu traiter avec succès certaines questions qui utilisaient les résultats établis aux questions précédentes.

**III.A.1)** Beaucoup de candidats proposent la preuve suivante, qui illustre bien les libertés qui sont prises avec les normes de vecteurs :

$$\begin{aligned}
& \|P^{-1}APw\| \leqslant \mu\|w\|, \forall w \\
\text{donc} \quad & \|P^{-1}AP\| \leqslant \mu \\
\text{donc} \quad & \|P^{-1}A^nP\| \leqslant \mu^n \\
\text{donc} \quad & \|P^{-1}A^nPw\| \leqslant \mu^n\|w\|, \forall w
\end{aligned}$$

C'est évidemment inacceptable !

**III.A.2a)** Beaucoup de candidats observent qu'il s'agit de l'inégalité triangulaire. D'autres citent Cauchy-Schwarz ou Minkowski !

**III.A.3b)** Presqu'aucun candidat ne fait le lien avec ce qui précède. On lit trop souvent d'après Cauchy-Schwarz, $\|Pw\| \leqslant \|P\|\|w\|$ ou même $\|Pw\| = \|P\|\|w\|$.

**III.A.3)** Beaucoup de réponses, la plupart farfelues. Très peu de bonnes.

**III.A.4)** et **III.A.5)** Assez bien traitées car utilisant les résultats déjà établis et se prêtant moins facilement à des justifications erronées.

**III.B.1)** Une majorité de candidats sait que deux matrices semblables ont même spectre.

**III.B.2)** Les candidats oublient souvent la valeur absolue. Parmi les réponses correctes, on trouve des expressions maladroites comme $\max\{|d_i\|, d_i \in \mathrm{Sp}(D)\}$. Les candidats semblent mal à l'aise avec le langage ensembliste.

**III.B.3)** Beaucoup écrivent automatiquement $\|Dw\| = \|D\|\|w\| = \rho(D)\|w\|$ mais on trouve aussi des candidats capables de produire un raisonnement correct.

**III.B.4)** Même remarque qu'en III.A.4, beaucoup de candidats utilisent correctement les résultats des questions III.B.3 et III.B.1.

**III.B.6)** Presque jamais abordée.

**III.C.1)** Le polynôme caractéristique et le rayon spectral sont en général correctement calculés. Beaucoup pensent que « le polynôme caractéristique est scindé » est une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Cependant, des candidats fournissent des réponses intelligentes à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

**III.C.2)** Bien traitée dans l'ensemble.

**III.D.1)** Attention à bien préciser que le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Le rayon spectral est souvent correct, malgré l'oubli fréquent des valeurs absolues.

**III.D.2)** Souvent bien traitée, ce qui rassure sur la bonne connaissance du théorème de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ !

**III.D.3)** Bonne utilisation des résultats des questions précédentes.

**III.D.4)** Bien traitée dans l'ensemble.

**III.D.5)** Quasiment jamais abordée.

### Partie IV

Cette partie a été assez peu abordée, alors qu'elle était tout à fait accessible. Parmi les candidats qui s'y risquent, une proportion assez élevée fait correctement les calculs en **IV.E** (les vecteurs, pas les rayons spectraux) et **IV.F**, parfois grâce à la calculatrice.

## Conclusion

Les candidats ont rencontré d'importantes difficultés à cause de la nature abstraite du sujet. Ceci ne les a pas empêché d'aborder l'essentiel, de traiter un grand nombre de questions, et les copies ont été cette année bien plus fournies que les années précédentes.

On peut noter parmi les points négatifs une absence de scrupule de la part de nombreux candidats qui se soucient extrêmement peu de la forme et du sens de ce qu'ils écrivent. Toutefois, beaucoup d'entre eux ont su utiliser avec succès les résultats de certaines questions pour établir les résultats des questions suivantes, faisant preuve d'un esprit combatif.

On soulignera donc la bonne volonté de ces candidats, tout en les encourageant à travailler la rigueur de leurs raisonnements, ainsi que la précision de leur expression.